Specjalizacja
to znamię naszych czasów

Wierzymy, że uczony specjalista
poświęcający życie badaniu określonego problemu
rozwiąże go szybciej i lepiej
niżby to uczynił natchniony laik
czy przypadkowy przechodzień

Jeśli więc dręczy cię pytanie
masz wierzyć
że gdzieś istnieje fachowiec
co nie wiedząc nic
z tego co tobie bliskie i znajome
zna potrzebną ci odpowiedź

I zamiast odpowiadać sobie
poszukujemy go

A nie znajdując
powołujemy do życia
nowe specjalności
odrywając od istniejących dyscyplin
i usamodzielniając
coraz to inne ich części
dzieląc żywy organizm nauki
na poszczególne wyspecjalizowane
tkanki czy wręcz komórki

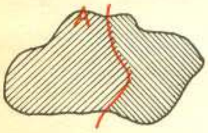
Bawiąc się tak od dawna
niepomni
że to podział obowiązków ledwie
i rzemieślniczych umiejętności
stawiamy coraz wyraźniej
mądrość
poza obrębem
nauki

Rozważania o topologii spójności

Prof. dr Andrzej GRZEGORCZYK

W rozważaniach tych chcę zwrócić uwagę na kilka łatwych spostrzeżeń z pogranicza topologii i logiki, które nie były do tej pory wykorzystane, chociaż trudności techniczne z nimi związane są tego rzędu, że można by je traktować jako ćwiczenia dla początkujących logików i topologów. Będą też postawione związane z tymi spostrzeżeniami trudniejsze problemy.

Spójność. Topologię można rozumieć jako najogólniejszą geometrię, która zajmuje się dowolnymi bryłami, nie muszącymi podlegać wymaganiom żadnego rodzaju regularności. Dla laika może wydawać się dziwne, że można jednak coś powiedzieć o tak ogólnie pojętych bryłach. To, że istnieją takie bardzo ogólne prawdy, najłatwiej zilustrować na pojęciu spójności. Pojęcie spójności, jak potwierdzają to niektórzy psychologowie, powstaje bardzo wcześnie w umyśle dziecka jako pojęcie „jednego kawałka". Określenie potoczne mogłoby więc brzmieć:



Rys. 1. Kawałek spójny. Jeśli podzielimy go na dwie części, to muszą się one stykać.

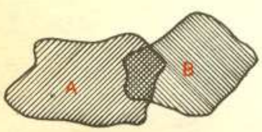
Twór geometryczny jest spójny, gdy składa się z jednego kawałka, czyli gdy nie można go podzielić na dwa kawałki, które nie stykałyby się bezpośrednio.

Ta intuicja znalazła swój wyraz w definicji pojęcia spójności na gruncie topologii startującej od pojęcia domknięcia:

$$X \text{ spójne} \Leftrightarrow \bigwedge_{A,B} (X = A \cup B \wedge A \neq 0 \neq B \rightarrow (A \cap \bar{B} \neq 0 \vee B \cap \bar{A} \neq 0)),$$

gdzie $^{-}$ oznacza domknięcie, a 0 — zbiór pusty.

Spostrzeżenie bezpośredniej intuicyjności pojęcia spójności i większej elementarności tego pojęcia w porównaniu z pojęciem domknięcia nasuwa myśl, że w aksjomatycznym traktowaniu tego działu matematyki powinniśmy się pokusić o zbudowanie aksjomatycznej teorii spójności, jako (być może) bardziej podstawowej aniżeli algebra domknięć. Teoria taka, jak się zdaje, nie była do tej pory przedmiotem publikowanych badań.
Od razu nasuwają się dwa aksjomaty:

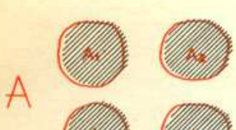


Rys. 2. Ilustracja do aksjomatu 1: dwa kawałki spójne mające część wspólną tworzą razem jeden spójny kawałek.

A1 A i B są spójne $\wedge$ $A \cap B \neq 0 \rightarrow A \cup B$ spójne
A2 X spójne $\wedge$ C jest składową Y $\wedge$ $X - C$ niespójne $\rightarrow$ $X - Y$ niespójne.

A1 mówi, że jeśli A i B są pojedynczymi kawałkami i mają one jakiś punkt wspólny, to ich suma też jest jednokawałkowa.
A2 trudniej jest wypowiedzieć i uzasadnić bez pewnych doświadczeń wyobraźni. Najpierw trzeba wprowadzić pojęcie składowej. Jeśli zajmujemy się dowolnymi tworami (również takimi, które składają się z wielu kawałków nie dotykających do siebie), to:

C jest składową Y, gdy C jest takim kawałkiem Y, który jest spójny, oraz pozostałe kawałki Y nie stykają się z C.

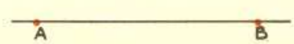


Rys. 3. Cztery składowe niespójnego A.

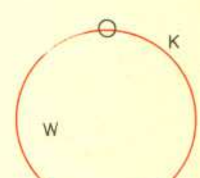
Intuicyjnie jest to zrozumiałe: cztery koła narysowane daleko jedno od drugiego są czterema osobnymi składowymi tworu geometrycznego złożonego z tych czterech kół.
Formalnie na gruncie algebry Boole'a składowe określamy jako największe części spójne zawarte w danym tworze geometrycznym:

$$C \text{ jest składową } Y \Leftrightarrow C \text{ spójne} \wedge C \subset Y \wedge \bigwedge_{D} (D \text{ spójne} \wedge C \subset D \subset Y \rightarrow C = D).$$

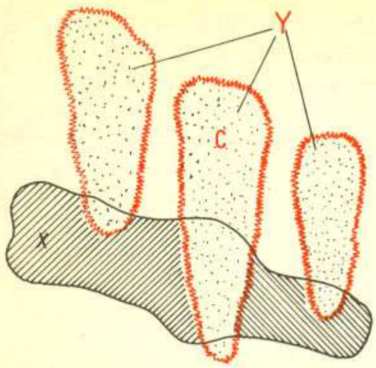
Domknięcie, *wnętrze* i *ograniczenie* zbioru, zbiory *otwarte* i *domknięte* — to pojęcia tradycyjnie przyjmowane w topologii jako podstawowe. Na prostej (rys. I) punkty A i B stanowią ograniczenie odcinka AB zarówno, jeżeli zaliczamy je do odcinka, jak i w przeciwnym przypadku. Na płaszczyźnie (rys. II) okrąg O jest ograniczeniem koła K, a wnętrze W tego koła — to koło bez ograniczającego je okręgu. Jeżeli rozważamy koło wraz z niektórymi tylko punktami na okręgu, to wnętrze i ograniczenie pozostaną bez zmian. Domknięcie zbioru składa się z niego samego i wszystkich punktów granicznych, tj. granic ciągów punktów zbioru, w szczególności każdy zbiór jest podzbiorem swojego domknięcia. Zbiór równy swojemu domknięciu jest domknięty. Zbiór równy swojemu wnętrzu jest otwarty. Są zbiory, które nie są ani otwarte, ani domknięte, np. wnętrze koła plus kilka punktów z ograniczającego je okręgu. Mamy zawsze: wnętrze = zbiór minus ograniczenie, domknięcie = zbiór plus ograniczenie.



Rys. I



Rys. II



Rys. 4. Ilustracja do aksjomatu 2: jedna ze składowych Y rozcina X, a więc całe Y rozcina X.

Po tych wyjaśnieniach sens **A2** można wypowiedzieć potocznie: jeśli X jest spójne, a Y składa się z kilku kawałków, to jeśli któryś z kawałków Y-ka (któraś ze składowych — nazwaliśmy ją C) rozcina X (czyli czyni różnicę $X-C$ niespójną), to wówczas całe Y też rozcina X. Np. jeśli mamy dziesięć odległych od siebie (np. równoległych) tarcz piłujących i zbliżymy do nich X spójne, i jeśli jedna z tarcz odpiłuje od X jakiś osobny kawałek, to w wyniku piłowania całym zespołem tarcz na pewno podzielimy X na jakieś kawałki. Gdyby, po potraktowaniu całym zespołem pił, przedmiot X pozostał spójny, znaczyłoby to, że żadna piła (żadna składowa) go nie przecięła. W tej wersji pozytywnej, brzmiącej formalnie:

T1 X spójne $\wedge$ C jest składową $Y \wedge X-Y$ spójne $\rightarrow X-C$ spójne

aksjomat **A2** można uważać za prawie identyczny z własnością 5 pojęcia spójności wymienioną przez K. Kuratowskiego w jego fundamentalnej Topologie II, s. 88.

Nie jest łatwo wskazać więcej równie ogólnych i intuicyjnych aksjomatów pojęcia spójności. Można oczywiście powiedzieć, że twór jednopunktowy jest spójny, a złożony z kilku osobnych punktów jest niespójny. Mielibyśmy wtedy cztery oczywiste aksjomaty. Warto może zaznaczyć, że przy boolowskim, a nie mnogościowym traktowaniu tworów geometrycznych, te dwa ostatnie aksjomaty nie przesądzają wcale punktowego charakteru przestrzeni, można je bowiem ująć jako zdania warunkowe:

A3 X jest atomem $\rightarrow X$ jest spójne
A4′ X, Y są atomami $\wedge X \neq Y \rightarrow X \cup Y$ niespójne.

Algebra Boole'a — to teoria relacji zawierania rozumianego jako bycia częścią (nie zaś bycia elementem). Aksjomaty algebry Boole'a mówią o własnościach relacji $\subset$ oraz o istnieniu części wspólnej dla dwóch obiektów X i Y (oznaczanej przez $X \cap Y$), oraz sumy $X \cup Y$ i różnicy $X-Y$. Aksjomaty te są bardzo ogólne, tak że pasują do takiej sytuacji, w której wyobrażamy sobie, że istnieją najmniejsze przedmioty niepodzielne zwane w tej teorii atomami. Formalnie aksjomaty można zapisać następująco:
$A \subset A$; $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$;
$A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$; $0 \subset A$; $A \subset 1$;
$A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$;
$A \subset X \wedge B \subset X \rightarrow A \cup B \subset X$;
$A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$;
$X \subset A \wedge X \subset B \rightarrow X \subset A \cap B$;
$A-B \subset A$; $(A-B) \cap B = 0$;
$(A-B) \cup B = A \cup B$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

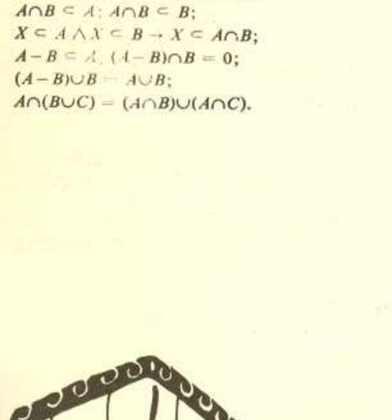
Atomem nazywamy coś, czego podzielić się już nie da:

X jest atomem $\Leftrightarrow X \neq 0 \wedge \bigwedge_{Y} (Y \neq 0 \wedge Y \subset X) \rightarrow X = Y$.

Przyjmując **A3** i **A4′** wcale nie zakładamy, że istnieją atomy. Natomiast jak się zdaje, z tego, że twór dwuatomowy jest niespójny, wcale nie wynika, że trójatomowy również musi być niespójny (formalny dowód niezależności może być trudny). Stąd być może istnieje potrzeba przyjęcia (zamiast **A4′**) aksjomatu nieelementarnego:

A4 X składa się ze skończonej ilości atomów, przy tym co najmniej z dwóch $\rightarrow$ $\rightarrow X$ nie jest spójne.

(A może jest prawdziwe jakieś zdanie, które mogłoby służyć za krok indukcyjny pozwalający dowodzić, że większe zbiory skończone są niespójne, jeśli niespójne są mniejsze?) Przy szukaniu aksjomatów uzupełniających warto pamiętać o istnieniu pewnych bardzo dziwnych zbiorów spójnych, jak np. tzw. miotełka Knastera-Kuratowskiego (Topologie II, s. 85), która jest zbiorem spójnym, ale po odjęciu jednego specjalnego punktu p rozpada się na poszczególne punkty, w tym sensie, że składowymi różnicy: miotełka — $\{p\}$ są poszczególne punkty.



Niedefiniowalność domknięcia. Proponując nową teorię trzeba przede wszystkim rozważyć, czy jest ona rzeczywiście nowa, czy też stanowić będzie tylko inną wersję teorii dawno znanej. W naszym przypadku teorią dawno znaną jest algebra domknięć, będąca systemem aksjomatycznym, najbardziej rozpowszechnionym w wersji pochodzącej od K. Kuratowskiego. Ma ona jako swoje terminy pierwotne pozalogiczne: 1° terminy algebry Boole'a (np. relację inkluzji boolowskiej $\subset$, którą można czytać jako „bycie kawałkiem" czegoś, aby uniknąć sugestii atomiczności, która na początku nie jest założona), 2° pojęcie domknięcia, spełniające aksjomaty: $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$, $X \subset \overline{X}$, $\overline{0} = 0$. Łatwo można wykazać, że zamiast pojęcia domknięcia terminem pierwotnym specyficznie topologicznym może być równie dobrze pojęcie wnętrza, albo pojęcie ograniczenia, pojęcie elementu otwartego, lub pojęcie elementu domkniętego. Powstaje więc przypuszczenie, że dla tej teorii, lub dla teorii nieco mocniejszej (przestrzeni topologicznych, dla których zakłada się atomiczność i domkniętość atomów), spójność jest po prostu jednym z możliwych terminów pierwotnych. Otóż tak nie jest, ponieważ prawdziwe jest następujące twierdzenie:

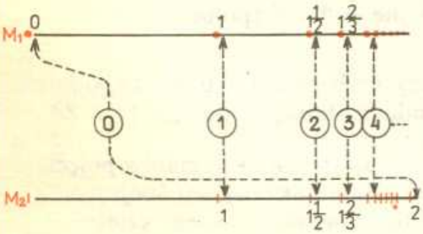
Na gruncie twierdzeń algebry domknięć domknięcie nie jest definiowalne przy pomocy spójności.

Znaczy to, że nie można wyprowadzić w algebrze domknięć ani w algebrze przestrzeni topologicznych twierdzenia, które mogłoby być definicją domknięcia i w definiensie miałoby wyłącznie terminy algebry Boole'a i pojęcie spójności.

Dowód powyższego twierdzenia jest bardzo prosty. Wystarczy pokazać model, w którym przy dwóch różnych interpretacjach domknięcia pojęcie spójności byłoby takie samo. Modelem takim są liczby naturalne, o których można założyć zarówno, że każda jest izolowana (czyli że stanowią tzw. topologię dyskretną), jak i że liczba 0 jest granicą ciągu dyskretnego pozostałych liczb. Dla kogoś, kto chce operować wyobraźnią geometryczną, musimy skonstruować dwa modele złożone z liczb rzeczywistych (rysunek 5):

$$M_1 = \{0\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n} \quad (\text{dla } n \neq 0)\right\},$$

$$M_2 = \left\{2 - \frac{1}{n} \quad (\text{dla } n \neq 0)\right\} \cup \{2\}.$$



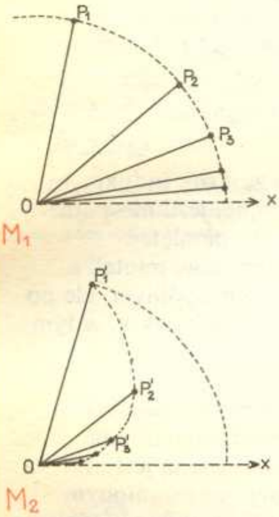
Rys. 5. Na gruncie algebry domknięć domknięcie nie jest definiowalne przy pomocy spójności.

W modelu M_1 żaden punkt nie jest granicą ciągu pozostałych, w modelu M_2 punkt 2 jest granicą ciągu pozostałych. Punkty obu modeli można ponumerować przyjmując, że dla $n \neq 0$ liczba n jest numerem punktu $2 - \frac{1}{n}$. Numer 0 w modelu M_1 dajemy liczbie rzeczywistej 0, a w modelu M_2 liczbie rzeczywistej 2. W ten sposób zamiast o liczbach rzeczywistych możemy mówić o ich numerach. Otóż istota argumentacji jest ta, że mamy dwa różne pojęcia domknięcia, a zbiory spójne są w obu przypadkach takie same, bowiem w obu modelach zbiorami spójnymi są wyłącznie zbiory jednopunktowe. W takim przypadku ogólne twierdzenia logiki mówią, że to pojęcie, które można interpretować na dwa różne sposoby, nie jest definiowalne za pomocą pojęcia, które w obu interpretacjach zachowuje ten sam sens.

Tak więc startując od pojęcia spójności mamy do czynienia z teoriami zasadniczo innymi niż algebra domknięć. Stąd np. powstaje otwarte zagadnienie, czy zbiór twierdzeń zawierających wyłącznie pojęcie spójności oraz pojęcia boolowskie (czyli takich twierdzeń jak **A1—A4**), oraz wyprowadzalnych w algebrze domknięć jest skończenie aksjomatyzowalny, lub aksjomatyzowalny za pomocą pewnych ogólnych schematów, czy nie?

Rzeczą dość naturalną jest poszukiwanie definicji domknięcia za pomocą spójności w przestrzeniach, w których spójność gra jakąś istotną rolę — takimi są przestrzenie spójne i lokalnie spójne. Otóż można dowieść, że:

Na gruncie topologii przestrzeni spójnych i lokalnie spójnych domknięcie nie jest definiowalne przez spójność.

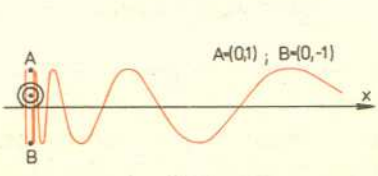


Rys. 6. Na gruncie topologii przestrzeni spójnych i lokalnie spójnych domknięcie nie jest definiowalne przez spójność.

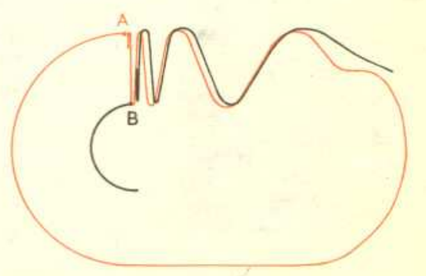
W dowodzie podaje się dwa modele, w których zbiory spójne są izomorficzne, ale izomorfizm, który dobrze przenosi spójność, nie przenosi domknięcia (rysunek 6). Oba modele składają się z ciągu odcinków promieniście wychodzących z tego samego punktu centralnego 0 w określonych kierunkach. Kierunki te niech mają np. kąty o mierze łukowej równej $1/n+1$ w stosunku do osi x-ów. Natomiast na osi x-ów nie ma odcinka ani w jednym modelu, ani w drugim. W modelu M_1 wszystkie te promienie mają tę samą długość. W modelu M_2 są coraz krótsze i dążą do zera. Izomorfizm polega na proporcjonalnym skracaniu promieni. W ten sposób zachowuje on spójność, a nie zachowuje domknięcia, bowiem w modelu M_2 punkt centralny jest granicą końców promieni, a w modelu M_1 oczywiście nie jest.

Lokalna spójność. Zbiór (przestrzeń) jest *lokalnie spójny* (*–a*), gdy w każdym otoczeniu każdego punktu istnieje takie otoczenie tego punktu, które jest spójne. Otoczenie punktu p to każdy zbiór G, którego wnętrze zawiera punkt p. Tzw. sinusoida zagęszczona: $y = \sin 1/x$ wraz z odcinkiem $[A, B]$ jest zbiorem spójnym, lecz nie lokalnie spójnym, ponieważ „małe" otoczenia punktów odcinka $[A, B]$ nie są spójne (rys. III). Zbiory, które są spójne, ale nie lokalnie spójne, przeczą niektórym potocznym intuicjom spójności, mogą na przykład przechodzić przez siebie nie przecinając się (rys. IV).

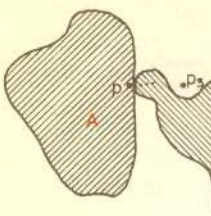
Zadanie: jak opisać „normalnie" fakt „przechodzenia jednej krzywej przez drugą", pokazany na rysunku IV?



Rys. III. Sinusoida zagęszczona.



Rys. IV. Te krzywe się nie przecinają.



Rys. 7. Ciąg $\{p_n\}$ dąży do p, suma $A \cup B$ musi być więc spójna.

Definicja domknięcia w przestrzeniach lokalnie skończenie podzielnych. Tą nazwą oznaczam przestrzenie, w których w każdym otoczeniu dowolnego punktu istnieje takie otoczenie G tegoż punktu, że składowych uzupełnienia otoczenia G jest skończenie wiele. Dla takich przestrzeni nasuwa się dość intuicyjna definicja domknięcia:

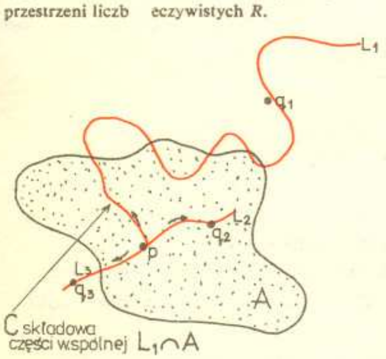
$$p \in \overline{X} \Leftrightarrow \text{istnieje taki ciąg } \{p_n\} \text{ punktów zbioru } X, \text{ że } \bigwedge_{A,B} (A \text{ i } B \text{ są spójne } \wedge$$
$$\wedge\ p \in A \wedge \text{ nieskończenie wiele } p_n \text{ należy do } B \to A \cup B \text{ spójne}).$$

Takie określenie zgodne jest ze znaną do tej pory definicją domknięcia. Wynikanie ($\to$) jest dość oczywiste. Dowodząc wynikania odwrotnego zakładamy, że $p \in X$ i rozważamy dowolny ciąg p_n punktów zbioru X. Wszystkie p_n od pewnego miejsca muszą leżeć poza pewnym otoczeniem (zbiorem otwartym) G. Skoro przestrzeń jest lokalnie skończenie podzielna, to dla $G' \subset G$ istnieje skończona ilość składowych uzupełnienia G'. A więc nieskończenie wiele p_n musi należeć do którejś składowej tego uzupełnienia. Składowa ta jest więc takim zbiorem B, a zbiór jednopunktowy $\{p\}$ zbiorem A, dla których prawa strona powyższej równoważności jest fałszywa.
Interesujące wydaje się poszukać takiej definicji domknięcia, która nie operowałaby ciągami i skończonością, ani nawet punktami, a więc którą można by przyjąć nie zakładając atomiczności przestrzeni. Podstawowe i pierwotne wyobrażenia geometryczne są bowiem makroskopowe, stąd interesujące wydaje się pytanie, jak wiele z topologicznych rozważań można przeprowadzić nie przyjmując, że istnieją jakieś takie niestwierdzalne najmniejsze twory „nieskończenie małe” zwane punktami. Otóż istotnie, na podstawie nieco innych intuicji można sformułować definicję nie odwołującą się do punktów. Natomiast w oparciu o intuicje związane z powyżej podaną definicją i dla tak ogólnej kategorii przestrzeni nie potrafię podać prostszej lub bardziej boolowskiej definicji domknięcia, która by nie operowała punktami lub pojęciem nieskończoności.

Przestrzeń euklidesowa to zbiór R^n $(n \geqslant 1)$, tj. produkt kartezjański skończonej liczby przestrzeni liczb eczywistych R.

Definicja domknięcia w przestrzeniach euklidesowych. Podstawowe wyobrażenia przestrzenne wiążą się z przestrzeniami euklidesowymi. Na gruncie tych przestrzeni mając intuicję spójności można określić domknięcie. Nadto prościej w tym przypadku przedstawia się definicja wnętrza. Podam najpierw definicję wnętrza operując punktami:

$$p \in \operatorname{Int} A \Leftrightarrow \bigwedge_{L,q} (L \text{ spójne} \wedge q \in L \wedge q \neq p \to$$
$$\to \bigwedge_{C} (p \in C \wedge C \text{ jest składową } L \cap A \wedge C \neq \{p\})).$$



Rys. 8. Idąc po dowolnej drodze spójnej idziemy zawsze jakiś czas po A, a zatem p leży wewnątrz A.

Intuicję tej definicji można opisać następująco (zob. rys. 8). Punkt p należy do wnętrza zbioru A, jeśli idąc od punktu p w dowolnym kierunku (wyznaczonym przez pewną dowolną drogę spójną L) ku pewnemu innemu dowolnemu punktowi q, będziemy zawsze szli przez pewien czas po punktach ze zbioru A. Wynikanie $\to$ jest mniej więcej oczywiste. Dowodząc odwrotnego, gdy $p \notin \operatorname{Int} A$, ale $p \in A$ bierzemy pewien ciąg $\{a_n\}$ punktów spoza A taki, że $p = \lim \{a_n\}$ i łączymy punkty tego ciągu czymś w rodzaju łamanej z punktem p na końcu. Taka łamana L falsyfikuje prawą stronę równoważności.
Przejście do definicji nie operującej punktami można zrobić następująco. Najpierw określamy, kiedy pewien element X jest „kawałkiem” wnętrza elementu A:

$$X \subset \operatorname{Int} A \Leftrightarrow \bigwedge_{Y} (Y \neq 0 \wedge Y \subset X \to \bigvee_{Z} Z \neq 0 \wedge Z \subset Y \wedge \bigwedge_{L} (L \text{ spójne } \wedge L \cap Z \neq \ \wedge$$
$$\wedge\ L \neq 0 \to \bigvee_{C} (C \text{ jest składową } L \cap A \wedge C \cap Z \neq 0 \wedge C - Z \neq 0))).$$

Wnętrze określamy teraz jako sumę boolowską wszystkich jego kawałków. Przyjmując, że $F(X, A)$ jest formułą zdaniową z prawej strony powyższej równoważności, element S będący sumą takich X, dla których $F(X, A)$, jest jedynym spełniającym warunki:

$$\bigwedge_{Y} (F(X, A) \to X \subset S)$$
$$\bigwedge_{Y} \Big(\bigwedge_{X} (F(X, A) \to X \subset Y) \to S \subset Y\Big).$$

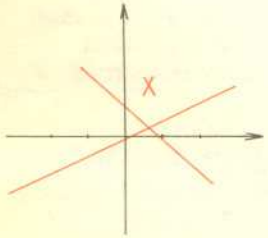
Usprawiedliwieniem tej definicji jest wykazanie jej prawdziwości w przestrzeniach euklidesowych rozumianych punktowo. Jeśli coś jest prawdziwe przy punktowym wyobrażeniu przestrzeni, to znaczy, że jest niesprzeczne, jak na to wskazuje kilkusetletnie doświadczenie matematyczne operujące punktami.

Można mieć jednak wątpliwości, czy punktowe wyobrażenie przestrzeni jest najwłaściwsze.

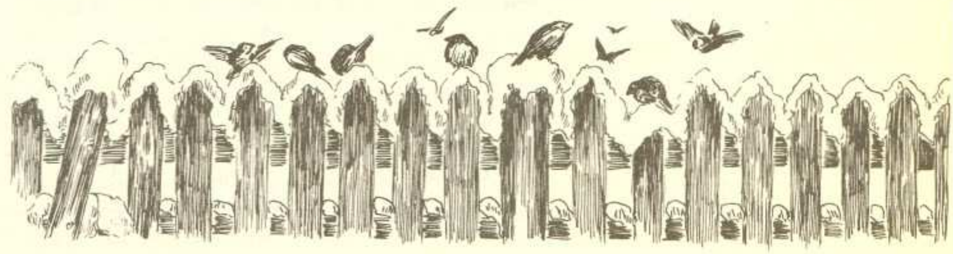
Zakończenie. Ogólny sens tych uwag polega na zachęcie do myślenia na gruncie topologii w sposób uruchomiający pewne elementy wyobraźni, które może nie były dość wykorzystane:

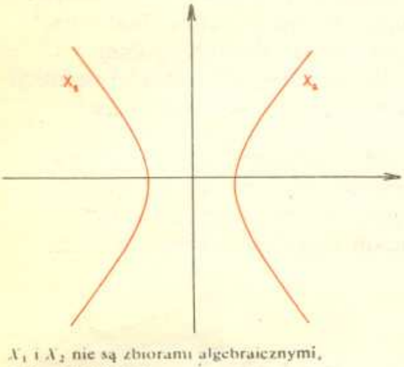
1. Rozpoczęcie rozważań od intuicji spójności. Znalezienie ładnej aksjomatyki minimalnej i stopniowych jej wzmocnień. Podanie szeregu pojęć definiowalnych za pomocą spójności, których rozważanie wydaje się naturalne jako pierwszy etap rozwoju teorii startującej od spójności, poprzedzający nawet definicję domknięcia, lub po prostu zmierzający w innym kierunku, nie korzystającym z pojęcia domknięcia.

2. Nie operowanie wyobrażeniem punktu, a więc rozwijanie teorii na gruncie algebry Boole'a bez założenia atomiczności.



$X = \{(x,y) : (2y-x)(y-x-1) = 0\} =$
$= \{(x,y) : 2y-x = 0\} \cup \{(x,y) : y-x-1 = 0\}.$



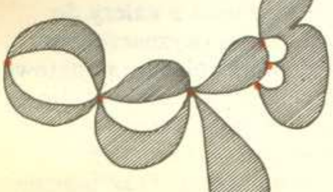


X_1 i X_2 nie są zbiorami algebraicznymi, a $X = X_1 \cup X_2$ tak.

Jeden kawałek, czy nie?

W teoriach matematycznych spotyka się wiele realizacji idei „spójności", rozumianej jako „składanie się z jednego kawałka". Zacznijmy od jednego z prostszych przykładów. Czy dwie przecinające się proste stanowią (z intuicyjnego punktu widzenia) zbiór jednokawałkowy, czy nie? Pogląd, że ten zbiór składa się z dwu oddzielnych prostych, „luźno, niejako przypadkiem, o siebie zaczepionych" — jest chyba zupełnie do przyjęcia?

I rzeczywiście, w pewnych teoriach matematycznych taki zbiór jest wyraźnie „niespójny", ma dwie „składowe". Aby wyrazić to ściśle i bez cudzysłowów, ograniczmy się może do zbiorów algebraicznych na płaszczyźnie. Tak nazywamy zbiory, które można opisać układem równań $f_1(x,y) = 0, \ldots, f_n(x,y) = 0$, w którym n jest pewną liczbą, a $f_1 \ldots, f_n$ — wielomianami. Gdy rozpatrujemy płaszczyznę kartezjańską R^2, to zamiast układu jaki napisaliśmy można wziąć tylko jedno równanie: $f_1^2 + \ldots + f_n^2 = 0$. Albowiem suma kwadratów liczb rzeczywistych jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie one są równe 0. Ale np. nad ciałem liczb zespolonych to już nie to samo.

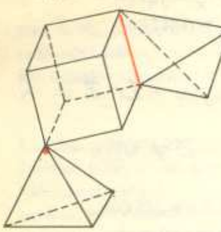


Z ilu „kawałków" składa się ten zbiór?

Definicja. Zbiór algebraiczny X nazywamy *algebraicznie spójnym* (częściej używa się terminu: *nieprzywiedlny* lub *nieredukowalny*) jeżeli nie da się przedstawić jako suma $X_1 \cup X_2$, gdzie X_1, X_2 są niepuste, różne od X i też algebraiczne.

Twierdzenie (łatwe, ale nie dowiedziemy). *Każdy zbiór algebraiczny jest sumą skończonej liczby zbiorów nieprzywiedlnych* (*zwanych jego składowymi*).

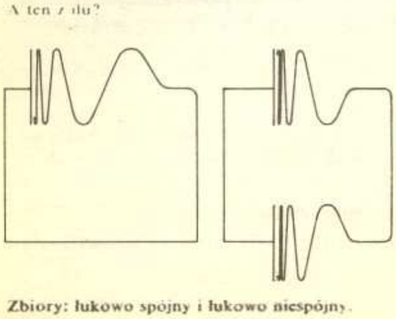
Przykład. Suma dwu przecinających się prostych jest oczywiście algebraicznie niespójna (przywiedlna). Z drugiej strony, hiperbola jest nieprzywiedlna. Dlaczego?



A ten z ilu?

Wiele innych spójności rozważanych w matematyce można ująć w taki schemat:
Dane są dwie klasy zbiorów, pierwszą nazwijmy zbiorami *Lepszymi*, drugą — *Gorszymi*, przy czym zbiór pusty jest *Gorszy* (**przykład 1**: L = zbiory nieskończone, G = zbiory skończone, **przykład 2**: L = wielościany, G = łamane w przestrzeni). Zbiór X nazywamy niespójnym, gdy da się przedstawić w postaci $X = X_1 \cup X_2$, gdzie X_1, X_2 są *Lepsze*, różne od X, a $X_1 \cap X_2$ jest zbiorem *Gorszym* (zob. rysunki).

Jeszcze inne spojrzenie na „spójność" można otrzymać rozumując jakoś tak. Obszar X uznamy za „spójny", jeżeli z każdego jego punktu można „dostać się" do dowolnego innego. Gdyby zniszczyć wszystkie mosty (oraz łódki itp.) w kraju pociętym kanałami, to dla osób umiejących pływać pozostałby on spójny, a dla niepływających — rozpadłby się na oddzielne „składowe" (wyspy, mówiąc po prostu). W topologii rozpatruje się często zbiory łukowo spójne, to jest takie, że od każdego punktu można dostać się do drugiego po łuku. Z pozoru banalne pojęcie „spójnego kawałka" okazuje się po bliższym spojrzeniu bardzo interesujące i z pewnością będziemy doń wracać.



Zbiory: łukowo spójny i łukowo niespójny.

M. Sz.