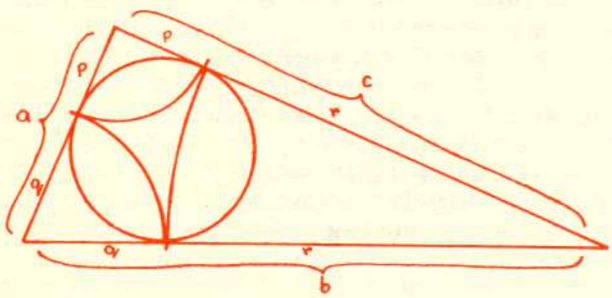
Gdy gospodarze wracali do domu, Bednarski krzyknął:
— A to ci heca. Odkryliśmy nowy sposób wpisywania okręgu w trójkąt!
Grzela i Sołtys już, już unosili rękę ze zgiętym palcem w kierunku czoła, gdy Bednarski szybko zrobił rysunek



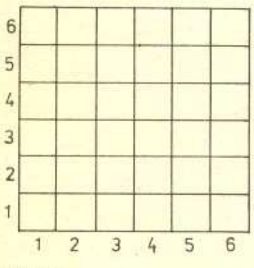
$$p = \frac{c-b+a}{2}$$

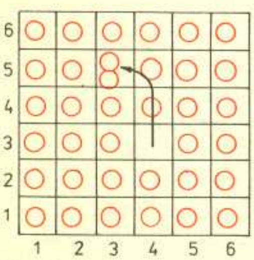
— No, to tylko wyznaczysz punkty styczności — zauważył Sołtys. Ale i tak to ciekawe!
Czy Ty też zrozumiałeś myśl Bednarskiego? Opisz konstrukcję. A jakie konstrukcje geometryczne odpowiadają pięciokątom, sześciokątom i innym wielokątom liczbowym? Czyżby też coś z wpisywaniem?

Małą Deltę opracowali Marianna KLAKLA i Michał SZUREK

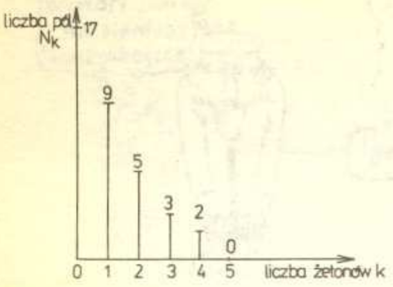
Gra w ciało stałe

Dr Stanisław DYMUS

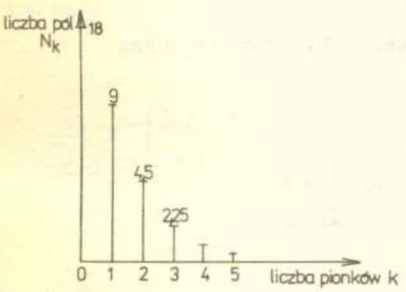

Rys. 1


Rys. 2

Proponujemy Ci przeprowadzenie ciekawej gry. Choć nie będziesz miał tu przeciwnika, możesz ją „wygrać". Wygrasz zaś wtedy, gdy potrafisz dobrze zrozumieć wypływające z tej gry wnioski. Odpowiednio zinterpretowana gra pozwoli Ci wniknąć w mikroskopowe procesy wymiany energii pomiędzy atomami ciała stałego i stwierdzić, jak rozkłada się energia drgań cieplnych pomiędzy te atomy.
Na początku opiszemy, na czym polega sama gra, i postaramy się wspólnie zrozumieć jej rezultaty. Do przeprowadzenia gry potrzebna jest „szachownica" 6×6 (rys. 1). Współrzędne każdego z pól „szachownicy" wyznaczają odpowiednie pary liczb (np. (2, 6), (4, 1) itp.). Dodatkowo musisz postarać się o 36 jednakowych żetonów (mogą być pionki od warcabów), które w sytuacji początkowej możesz rozmieścić w dowolny sposób na polach planszy, oraz dwie kostki. Oczka jednej z kostek powinieneś pokolorować, by móc odróżnić, która z nich wskaże Ci rzędną, a która odciętą wylosowanego pola planszy. Radzimy Ci rozpocząć grę w sytuacji, gdy na każdym polu znajduje się jeden żeton.
Grę przeprowadzasz rzucając dwukrotnie dwiema kostkami. Pierwszy rzut losuje współrzędne pola, które traci jeden żeton, drugi rzut — współrzędne pola, które ten żeton zyskuje (rys. 2). Jeśli losując trafisz w pierwszym rzucie na pole puste, to ponawiasz rzut dotąd, aż wylosujesz pole, które może „wyemitować" żeton.



Rys. 3



Rys. 4

Grając notuj co 10 podwójnych rzutów liczby pól o określonej liczbie żetonów. Stwierdzisz ciekawą prawidłowość — otóż liczba pół pustych będzie systematycznie rosła. Dopiero po 80—100 podwójnych losowaniach ustali się pewien stan równowagi. Od tej chwili liczba pól o określonej liczbie żetonów będzie ulegać jedynie stosunkowo niewielkim wahaniom. Jeżeli wykonasz wykres przedstawiający zależność liczby pól planszy N_k od liczby żetonów k obsadzających te pola w „stanie równowagi", to otrzymasz wynik niewiele odbiegający od wykresu na rys. 3.

Interesujące, że końcowy rozkład (pominąwszy wspomniane wyżej wahania — „fluktuacje") jest niezależny od początkowego rozmieszczenia żetonów (dla sprawdzenia możesz powtórzyć grę, obsadzając np. połowę pól planszy dwoma żetonami i pozostawiając pozostałe pola puste). Analizując rozkład na rys. 3 stwierdzamy, że stosunek liczby pól planszy mających o 1 żeton więcej do liczby pól o danej liczbie żetonów waha się wokół liczby 2. W idealnym przypadku stosunek ten powinien mieć dokładnie wartość 2, zaś idealny rozkład — postać przedstawioną na rys. 4. Rozkład taki mógłbyś uzyskać powtarzając grę wielokrotnie i obliczając średnią liczbę pól o danej liczbie żetonów (jeżeli rzucisz 1 raz 10 monet, to możesz otrzymać znaczne odchylenia od idealnego rozkładu 5 orłów i 5 reszek, jeśli natomiast powtórzysz taki rzut wielokrotnie i obliczysz średnią liczbę orłów i reszek we wszystkich rzutach, to uzyskasz rezultat bliski „idealnemu" wynikowi 5 orłów i 5 reszek). Podobnie rozkład bliższy idealnego otrzymałbyś używając większej planszy, np. 30×30 pól i 900 żetonów (analogicznie do rzutu tysiącem monet zamiast 10 monetami) — losowanie byłoby wtedy jednak bardziej skomplikowane, zaś sama gra zbyt czasochłonna.

Co stanie się, gdy zmniejszysz lub zwiększysz liczbę żetonów nie zmieniając planszy? Otóż uzyskany w wyniku gry rozkład żetonów pomiędzy polami planszy będzie cechowała podobna prawidłowość jak poprzednio: najwięcej pól będzie pustych, liczba pól z jednym żetonem będzie większa od liczby pól z dwoma żetonami itd. Można wykazać, że dla planszy o N polach obsadzonych q żetonami idealny rozkład opisany jest przez następującą zależność: stosunek liczby N_k pól o k żetonach do liczby N_{k+1} pól o $k+1$ żetonach nie zależy od k:

$$(*) \qquad \frac{N_k}{N_{k+1}} = 1 + \frac{N}{q}.$$

Dla przeprowadzonej przez Ciebie gry $N = 36$ i $q = 36$, zatem stosunek (*) równy jest dokładnie 2. Przy $N > q$ stosunek $N_k/N_{k+1} > 2$ i rozkład jest bardziej stromy od rozkładu na rys. 4. Jeśli $N < q$, wtedy $N_k/N_{k+1} < 2$ i rozkład staje się bardziej „łagodny" w porównaniu z rozkładem na rys. 4.

Spróbujmy teraz nadać naszej grze interpretację fizyczną. Otóż pola planszy można traktować jako atomy ciała stałego zlokalizowane w węzłach sieci krystalicznej. Każdy taki atom może mieć pewną liczbę porcji energii — „kwantów", która charakteryzuje intensywność jego drgań cieplnych. Porcje te reprezentują żetony. W ten sposób liczba żetonów na danym polu określa energię drgań odpowiedniego atomu. Losowanie modeluje przypadkowy charakter wymiany energii pomiędzy atomami. W rezultacie tej wymiany kwantów energii ustala się, jak to wynika z przeprowadzonej gry, określony rozkład energii pomiędzy atomami ciała stałego. Rozkład ten ma, z grubsza biorąc, charakter rozkładu przedstawionego na rys. 4. W każdym układzie N atomów ciała stałego o ustalonej liczbie q porcji („kwantów") energii zawsze najwięcej jest atomów o energii najniższej, zaś liczba atomów o coraz to wyższych energiach systematycznie maleje. Zwróć uwagę, że liczba q oznacza liczbę porcji energii całego układu, określa więc jego energię wewnętrzną. Jeśli dane ciało stałe ogrzejemy, to wzrośnie jego temperatura i jego energia wewnętrzna (czyli liczba „kwantów" q). Stosunek N/q stanie się wtedy mniejszy i jak to wynika ze wzoru (1) rozkład energii będzie bardziej „równomierny". Oziębienie ciała i zmniejszenie jego energii wewnętrznej powoduje wzrost stosunku N/q i rozkład energii staje się bardziej „stromy".

Należy zwrócić uwagę, że statystyczna tendencja — „chęć" atomów czy molekuł do posiadania najmniejszej możliwie energii odnosi się nie tylko do ciał stałych, lecz do dowolnych układów ciał makroskopowych nie oddziałujących z otoczeniem. Znanym zjawiskiem jest np. zmniejszanie się gęstości powietrza wraz z wysokością nad powierzchnią Ziemi. Cząsteczki powietrza „wolą" przebywać najniżej, tak by ich energia potencjalna była jak najmniejsza. Zmniejszanie się gęstości powietrza ze wzrostem energii potencjalnej (wysokości) ma taki sam charakter, jak zmniejszanie się liczby atomów przy wzroście energii w omówionym powyżej modelu ciała stałego.

Zadania z „Małej Delty” są szczególnymi przypadkami następującego problemu: Dany jest n-wyrazowy ciąg $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Znaleźć ciąg $(x_1, x_2, ..., x_n)$ taki, że

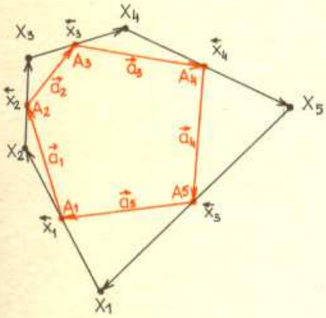
$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= a_1 \\ x_2+x_3 &= a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n+x_1 &= a_n \end{aligned}$$

Aby rozwiązać to zadanie (a więc powyższy układ równań), pomnóżmy co drugie równanie przez -1 i dodajmy wszystkie stronami. Gdy n jest liczbą nieparzystą, otrzymujemy $x_1 = \frac{1}{2}(a_1-a_2+a_3- \dots -a_{n-1}+a_n)$. Wyznaczenie x_1 wystarcza do jednoznacznego wyznaczenia wszystkich pozostałych wyrazów. Mamy zatem ogólne rozwiązanie.

Jeżeli jednak n jest parzyste, sytuacja zmienia się. Opisana procedura daje $a_1-a_2+a_3- \dots +a_{n-1}-a_n = 0$ i nie mamy już rozwiązania, ale warunek jego istnienia. W tym przypadku jeżeli jakieś rozwiązanie istnieje, to istnieje ich nieskończenie wiele (jeżeli tylko nasze liczby pochodzą z ciała nieskończonego).

Analogiczne rozumowanie pozwala rozstrzygnąć problem znalezienia wielokąta o danych środkach jego boków:

Niech będzie dany układ punktów $A_1, A_2, ..., A_n$. Wyznaczyć punkty $X_1, X_2, ..., X_n$ takie, aby $A_1, A_2, ..., A_n$ były odpowiednio środkami odcinków $\overline{X_1X_2}, \overline{X_2X_3}, \dots, \overline{X_nX_1}$.



Zadanie to można bowiem interpretować następująco:

Dany jest ciąg wektorów $(a_1, a_2, ..., a_n)$ takich, że $a_1+a_2+ \dots +a_n = 0$. Znaleźć ciąg wektorów $(x_1, x_2, ..., x_n)$ takich, że

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 2a_1 \\ x_2+x_3 &= 2a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n+x_1 &= 2a_n. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ jak i przedtem, otrzymujemy analogiczne rezultaty, które teraz mają już przejrzystą treść geometryczną. W szczególności możemy wnioskować że wielokąt o nieparzystej liczbie wierzchołków jest jednoznacznie wyznaczony przez środki swoich boków (przy okazji dowiadujemy się, jak go znaleźć). Jeżeli liczba boków jest parzysta, to środki boków wielokąta nie określają go jednoznacznie.

Marianna KLAKLA

Kącik filatelistyczny (9)

Blaise Pascal (1623—1662) był sławnym francuskim matematykiem, fizykiem, filozofem i pisarzem. Już od dzieciństwa interesował się naukami ścisłymi i mając lat osiemnaście zbudował jedną z pierwszych maszyn do liczenia. Pascalowi zawdzięczamy podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa, kryteria podzielności liczb, oraz sposób obliczania współczynników w rozwinięciu dwumianu (tzw. trójkąt Pascala), a w fizyce podstawowe prawo hydrostatyki oraz pierwsze badania zjawisk ciśnienia atmosferycznego (dokonane wraz z Torricellim). Wszystkie te osiągnięcia są plonem niedługiego okresu pracy, bowiem w wieku zaledwie 30 lat Pascal zajął się filozofią i religią, którym poświęcił resztę swego życia. Reprodukujemy znaczek z podobizną Pascala wydany przez pocztę Francji w roku 1962, w trzechsetną rocznicę jego śmierci. Portret uczonego znaleźliśmy także na znaczkach: Francji z roku 1944 i Monaco z roku 1973.

Jerzy BARTKE