Trzy modele fizyki statystycznej

Doc. dr Lech T. KUBIK

Rozważmy następujące **zadanie**:
Mamy n cząstek, z których każda może znaleźć się w każdej z $N \geqslant n$ komórek. Znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w ustalonych n komórkach będzie po jednej cząstce, oraz prawdopodobieństwo zdarzenia B polegającego na tym, że w jakichkolwiek n komórkach będzie po jednej cząstce (inaczej mówiąc, że w żadnej komórce nie będzie więcej niż jedna cząstka). Tego rodzaju zadania rozpatruje się w fizyce statystycznej w odniesieniu do konkretnych cząstek fizycznych. Rolę komórek grają małe obszary, na jakie dzieli się rozpatrywaną przestrzeń.

Będziemy też rozważać zdarzenie C_k polegające na tym, że w ustalonej komórce znajduje się dokładnie k ($k \leqslant n$) cząstek. (Red.)

Rozwiązanie 1 (Model Maxwella-Boltzmanna)
Ponumerujmy cząstki liczbami 1, 2, ..., n, a komórki liczbami 1, 2, ..., N. Rozmieszczenie cząstek w komórkach możemy opisać za pomocą uporządkowanego układu n liczb $(i_1, i_2, ..., i_n)$, z których każda może być dowolną z liczb 1, 2, ..., N. Stojąca na pierwszym miejscu liczba i_1 podaje numer komórki, w której znalazła się pierwsza cząstka, liczba i_2 — numer komórki, w której znalazła się druga cząstka, ..., liczba i_n — numer komórki, w której znalazła się n-ta cząstka.
Przyjmijmy zbiór wszystkich opisanych wyżej uporządkowanych układów $(i_1, i_2, ..., i_n)$, tzn. zbiór wszystkich n-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, ..., N\}$, za przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω. Jak nietrudno sprawdzić, przestrzeń Ω zawiera N^n zdarzeń elementarnych. Przyporządkujmy każdemu z nich to samo prawdopodobieństwo $1/N^n$. Jeżeli mamy ustalonych n komórek i chcemy, aby w każdej z nich znalazła się jedna cząstka (których łącznie jest n), to możemy otrzymać to na $n!$ sposobów. A zatem

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}.$$

Zauważmy, że zdarzenie B składa się z $\binom{N}{n}n!$ zdarzeń elementarnych. Istotnie, spośród N komórek można wybrać n komórek (w których następnie umieścimy po jednej cząstce) na $\binom{N}{n}$ sposobów. A w każdej ustalonej grupie n komórek można — jak stwierdziliśmy przed chwilą — rozmieścić n cząstek tak, aby każda była w innej komórce, na $n!$ sposobów. Mamy więc

$$P(B) = \frac{\binom{N}{n}n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

Zmienna X „ilość cząstek w ustalonej komórce" ma tu rozkład dwumianowy i, jak łatwo sprawdzić,

$$P(C_k) = P(X = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{N^n}(N-1)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}$$

Jeśli teraz $N \to \infty$ i $n \to \infty$ tak, że średnia ilość cząstek na komórkę $n/N = \lambda$ pozostaje stała, to, jak można udowodnić,

$$P(C_k) \to e^{-\lambda}\lambda^k/k!$$

(por. *Rozkład Poissona*). Tak więc tzw. *postacią graniczną* statystyki Maxwella-Boltzmanna jest rozkład Poissona.

Były liczne próby pokazania, że rzeczywiste cząstki fizyczne zachowują się zgodnie z przedstawionym modelem Maxwella-Boltzmanna. Okazało się, że większość cząstek zachowuje się zgodnie z tym właśnie modelem jedynie w warunkach małych gęstości i wysokich temperatur gazu tych cząstek. Obserwowane częstości zbytnio odbiegają od prawdopodobieństw wynikających z tego modelu. W związku z tym rozpatrzymy drugi model.

Rozwiązanie 2. (Model Bosego-Einsteina)
W poprzednim rozwiązaniu cząstki ponumerowaliśmy. Traktowaliśmy je więc tak, jakby dały się one od siebie odróżniać. W związku z tym istotne dla nas było nie tylko, w której komórce jest ile cząstek, ale także które cząstki (o jakich numerach) znajdują się w danej komórce.
Obecnie uważajmy cząstki za nierozróżnialne (co zresztą odpowiada rzeczywistości: tego samego rodzaju cząstek fizycznych nie da się rozróżnić). Wobec tego rozmieszczenie cząstek w komórkach będziemy uważali za dane, gdy będziemy wiedzieć, ile cząstek jest w poszczególnych komórkach. Każde takie rozmieszczenie możemy zapisać za pomocą nieuporządkowanego zespołu liczb $(i_1, i_2, ..., i_n)$, z których każda może być dowolną z liczb 1, 2, ..., N. Jeżeli liczba 1 wystąpi w takim zespole dokładnie k razy (obojętnie na jakich miejscach), to oznacza to, że w komórce nr 1 znajduje się k cząstek. To samo dotyczy pozostałych liczb 2, 3, ..., N. Za przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω przyjmiemy teraz zbiór wszystkich opisanych wyżej nieuporządkowanych zespołów $(i_1, i_2, ..., i_n)$ (tzn. zbiór wszystkich n-elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, ..., N\}$). Przestrzeń Ω zawiera $\binom{N+n-1}{n}$ zdarzeń elementarnych. Dla przykładu wypisujemy niżej (tabela) wszystkie zdarzenia elementarne przy $N = 3$, $n = 2$ i odpowiadające im rozmieszczenia cząstek w komórkach we wszystkich trzech rozpatrywanych modelach.
W rozpatrywanym obecnie modelu Bosego-Einsteina przyporządkujmy każdemu zdarzeniu elementarnemu to samo prawdopodobieństwo $1/\binom{N+n-1}{n}$. Obecnie zdarzenie A składa się tylko z jednego zdarzenia elementarnego (permutowanie cząstek znajdujących się w ustalonych komórkach nie daje nic nowego, gdyż cząstki są nierozróżnialne). A zatem w obecnie rozpatrywanym modelu

$$P(A) = \binom{N+n-1}{n}^{-1}.$$

Zdarzenie B składa się obecnie z $\binom{N}{n}$ zdarzeń elementarnych. Na tyle bowiem sposobów można wybrać n spośród N komórek, a w wybranych n komórkach można obecnie umieścić po jednej cząstce tylko w jeden sposób.

Zmienna X „ilość cząstek w ustalonej komórce" ma tu rozkład

$$P(C_k) = P(X = k) = \binom{N+n-k-2}{n-k} : \binom{N+n-1}{n}.$$

Jeśli przyjąć, że $N \to \infty$ i $n \to \infty$ w taki sposób, że średnia ilość cząstek na komórkę $n/N = \lambda$ pozostaje stała, to, jak można udowodnić,

$$P(C_k) \to \frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}} = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^k \cdot \frac{1}{1+\lambda}.$$

Oznacza to, że *postacią graniczną* statystyki Bosego-Einsteina jest rozkład geometryczny z $p = \frac{1}{1+\lambda}$ i $q = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Stąd wynika, że

$$P(B) = \binom{N}{n} : \binom{N+n-1}{n}.$$

Zgodnie z modelem Bosego-Einsteina zachowują się fotony i atomy zawierające parzystą liczbę cząstek elementarnych. Istnieją jednak cząstki fizyczne, dla których ten model nie jest odpowiedni. W związku z tym rozpatrzmy trzeci model.

Rozwiązanie 3. (Model Fermiego-Diraca)

Przyjmiemy, że cząstki są nierozróżnialne i że w każdej komórce może znajdować się co najwyżej jedna cząstka. Obecnie rozmieszczenie cząstek będzie dane, gdy wskazane będą komórki niepuste (lub — co na jedno wychodzi — puste), gdyż zgodnie z przyjętym założeniem każda niepusta komórka zawiera dokładnie jedną cząstkę. Za przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω przyjmiemy więc w obecnym modelu zbiór wszystkich n-elementowych podzbiorów zbioru N-elementowego (zbioru wszystkich komórek), tzn. zbiór wszystkich n-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru $\{1, 2, ..., N\}$. Przestrzeń Ω zawiera więc $\binom{N}{n}$ zdarzeń elementarnych. Każdemu z nich przyporządkujmy to samo prawdopodobieństwo

Tu oczywiście nie można rozważać zdarzenia C_k dla $k > 1$.

$$1/\binom{N}{n}.$$

Zdarzenie A składa się oczywiście z jednego zdarzenia elementarnego, więc

$$P(A) = \binom{N}{n}^{-1}.$$

Natomiast

$$P(B) = 1,$$

gdyż zgodnie z przyjętym założeniem jest pewne, że w żadnej komórce nie będzie więcej niż jedna cząstka.

Zgodnie z modelem Fermiego-Diraca zachowują się m.in elektrony, protony i neutrony. Rozpatrzony przykład jest bardzo pouczający. Widać z niego wyraźnie, że przyjęcie odpowiedniego modelu probabilistycznego zależy od konkretnej sytuacji praktycznej. Wszystkie trzy omówione modele są sensowne z probabilistycznego punktu widzenia. Trudno było z góry przewidzieć, że żadne cząstki fizyczne na ogół nie będą się zachowywać zgodnie z pierwszym modelem (nie jest zresztą wykluczone, że kiedyś takie cząstki zostaną wykryte), że np. fotony będą się zachowywać zgodnie z drugim modelem, a elektrony zgodnie z trzecim.

Zestawienie zdarzeń elementarnych i odpowiadających im rozmieszczeń cząstek w komórkach przy $N = 3$, $n = 2$ w rozpatrzonych modelach

1. Model Maxwella-Boltzmanna (kwadraty z liczbami wyobrażają cząstki z odpowiednimi numerami)

Komórka nr	Zdarzenia elementarne								
	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(3,1)	(2,3)	(3,2)
1	$\boxed{1}\boxed{2}$			$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$		
2		$\boxed{1}\boxed{2}$		$\boxed{2}$	$\boxed{1}$			$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
3			$\boxed{1}\boxed{2}$			$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$

2. Model Bosego-Einsteina (kółka oznaczają cząstki)

Komórka nr	Zdarzenia elementarne					
	{1,1}	{2,2}	{3,3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}
1	○○			○	○	
2		○○		○		○
3			○○		○	○

3. Model Fermiego-Diraca (kółka oznaczają cząstki)

Komórka nr	Zdarzenia elementarne		
	{1,2}	{1,3}	{2,3}
1	○	○	
2	○		○
3		○	○