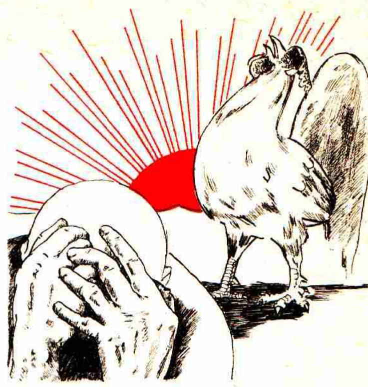
Nowocześni ludzie często wykazują pewną ciekawą sprzeczność. Na ogół dysponują licznymi teoriami, jednocześnie jednak nigdy nie dostrzegają roli, jaką teoria odgrywa w życiu praktycznym. Wciąż mówią o temperamencie, okolicznościach i roli przypadku. Ale większość ludzi jest takimi, jakimi ich ukształtowały ich własne teorie. Większość ludzi popełnia morderstwa, wstępuje w związki małżeńskie, czy też po prostu marnotrawi czas w wyniku jakiejś własnej teorii życia, narzuconej lub dowolnie obranej.
(G. K. Chesterton, *Poeta i wariaci*, przekład Zofii Sroczyńskiej.)



Zmysły

Mgr Jacek KACZYŃSKI

Wszyscy dobrze wiemy, że zadawać pytania można w sposób ułatwiający lub utrudniający odpowiedź. Znamy to choćby ze szkoły, egzaminów czy teleturniejów.
Na przykład — ile centymetrów wynosi różnica poziomu wody w Bałtyku między przypływem a odpływem? To pytanie (zadane w jednym z teleturniejów) jest wybitnie „podchwytliwe", gdyż w Bałtyku nie ma w ogóle przypływów.
Z kolei — na przeciwnym krańcu można umieścić szereg pytań opatrzonych wskazówką w rodzaju anegdotycznej już niemal: „dla ułatwienia dodajmy, że..."
Poznała to zjawisko na własnej skórze 40-osobowa grupa studentów matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, gdy wzięła udział w swego rodzaju „psychoeksperymencie". Polegał on na wypełnieniu ankiety zawierającej pytania na temat różnych szczegółów architektury wnętrza hallu Pałacu Kultury i Nauki. W tym właśnie gmachu mieści się Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, a więc wszyscy ci studenci od paru lat przemierzali ów hall po parę razy dziennie i powinni go znać jak własną kieszeń. Okazało się jednak inaczej.
Zacznijmy od wejścia do gmachu. Jedną z najcharakterystyczniejszych jego cech jest troje drzwi obrotowych, ale tylko trzy czwarte osób odpowiedziało prawidłowo na pytanie, ile jest tych drzwi. Pozostali sądzili, że jest ich 2 lub 4, a jednej osobie wydawało się nawet, że jest ich aż 5.
Pytanie to zostało sformułowane obiektywnie. Były jednak także pytania „tendencyjne" — sugerujące dobrą lub przeciwnie — błędną odpowiedź. Dodać trzeba, że połowa studentów dostała ankiety wyłącznie z pytaniami „obiektywnymi", zaś połowa miała niektóre pytania sformułowane tendencyjnie — jako naprowadzające, bądź mylące.
Najciekawszy efekt dały pytania mylące. Okazało się, jak zawodna jest nasza pamięć, czy też, może, jak mało spostrzegamy w miejscach, w których często jesteśmy. Zwłaszcza, gdy jest tam dużo różnorodnych szczegółów architektonicznych — jak właśnie w hallu PKiN. Okazało się, z jaką łatwością nasza wyobraźnia tworzy wtedy nie istniejące szczegóły czy przedmioty. Rozmnażają się kolumny. Schody wydłużają się lub skracają. Po sufitach i ścianach wędrują punkty świetlne: kinkiety przeobrażają się w świetlówki, zaś lampy neonowe — w żyrandole. Stojąca pośrodku rzeźba wędruje w jedną albo drugą stronę, raz stoi, raz siedzi, czasem jest jedną postacią, czasem dwiema. I tak dalej, i tak dalej.
Przyjrzyjmy się jeszcze przykładom. Na pytanie w wersji obiektywnej: „czy na ścianach galeryjek są jakieś ozdoby?" — 90% osób słusznie odpowiedziało, że nie ma. Lecz gdy zapytano „jakie ozdoby znajdują się na ścianach galeryjek?" — fałszywa sugestia zawarta w tym sformułowaniu sprawiła, że połowa odpowiadających zapełniła w wyobraźni to miejsce najróżniejszymi ozdobami. Tak więc ściany pokrywały się malowidłami albo płaskorzeźbami, wyrastały jakieś marmurowe kwiaty albo metaloplastyka.
Na pytanie obiektywne „czy wejścia do sali przy windach mają drzwi?" prawie połowa osób odpowiedziała prawidłowo — że nie mają. Jednak z ilością tych wejść (w pytaniu sąsiednim) były pewne kłopoty — znów niespełna połowa pamiętała, że są 2, pozostałym wydawało się, że jest ich 1 lub 3. Z tych, których zapytano „jakie drzwi są w tych wejściach?", tylko jedna czwarta nie dała się zwieść sugestii. Natomiast cała reszta zaczęła skwapliwie fantazjować. „Wmontowywano" tam drzwi wahadłowe, półobrotowe; niekiedy były to drzwi szklane, niekiedy dębowe, często pokrywała je metalowa krata.
Jak widać z tych przykładów, niesłychanie łatwo było uczestnikom ankiety powoływać do życia bardzo zróżnicowane przedmioty i detale lub mnożyć ilość istniejących. Wydaje się, że gdyby zmaterializować wszystkie te wytwory fantazji nie udałoby się ich pomieścić w hallu PKiN, mimo jego pokaźnych rozmiarów. Ale wybaczmy naszym matematykom.
Red.: Przedstawione fakty przekonują nas o doniosłości architektonicznego kształtu i wystroju pomieszczeń dla ich użytkowników.

Rozwiązanie zadania M 177
Niech A będzie k-elementowym podzbiorem zbioru X_n, B zaś dowolnym podzbiorem zbioru X_n rozłącznym z A. Dla danego zbioru A zbiór B może być jednym z 2^{n-k} podzbiorów zbioru $X_n - A$.
Tak więc par (A, B), gdzie $A \subset X_n$, $B \subset X_n$, $A \cap B = \phi$ i A ma k elementów jest $\binom{n}{k}\ 2^{n-k}$, gdzie zbiór A można wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów. Szukanych par (A, B) jest więc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 1^k = (2+1)^n = 3^n.$$

Wynik ten można także uzasadnić indukcyjnie. Dla $n = 1$ istnieją trzy pary podzbiorów rozłącznych: (ϕ, ϕ), $(\phi, \{1\})$, $(\{1\}, \phi)$. Załóżmy, że liczba par uporządkowanych podzbiorów rozłącznych zbioru X_n jest równa 3^n. Niech (A, B) będzie parą uporządkowaną podzbiorów rozłącznych zbioru X_{n+1}. Wówczas do co najmniej jednego ze zbiorów A i B nie należy liczba $n+1$ i zachodzi jeden z przypadków:

1) $A \subset X_n$, $B \subset X_n$
2) $A \subset X_n$, $n+1 \in B$
3) $n+1 \in A$, $B \subset X_n$.

Tak więc z każdej pary (A, B) podzbiorów rozłącznych zbioru X_n otrzymujemy trzy pary podzbiorów rozłącznych zbioru X_{n+1}: (A, B), $(A, B \cup \{n+1\})$, $(A \cup \{n+1\}, B)$. Każdą parę podzbiorów rozłącznych zbioru X_{n+1} otrzymamy w ten sposób. Zatem szukana liczba dla zbioru X_n równa jest $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że dla każdej liczby naturalnej n liczba par uporządkowanych podzbiorów rozłącznych zbioru X_n równa jest 3^n.