mała delta

Statystyka w wesołym miasteczku

Ulegając obietnicom afiszów, kupujemy los. Mamy pecha, los jest pusty. Kupujemy drugi. Znów nic. Trzeci też pusty. Jeszcze wszystko w porządku. „Co trzeci" nie znaczy „na trzy losy jeden musi wygrać", tylko że na — powiedzmy — każde 100 losów, pustych jest 67 czy 66. Kupujemy zatem czwarty los. Pusty. „Coś chyba nie tak z tą loterią". „Powinniśmy chyba już coś wygrać". Opanowuje nas żyłka hazardu. Przy piątym pustym losie zaczynamy podejrzewać, że afisz kłamał: wygrywających losów jest mniej niż 1/3. Przypuszczenie to umacnia się, jeżeli nie wygrywamy nic za szóstym, siódmym i ósmym razem. Ale od którego momentu możemy „tak naprawdę" twierdzić, że loteria jest nieuczciwa? że afisz kłamie? Stuprocentową pewność osiągniemy dopiero po wykupieniu wszystkich (przy sprzyjających układach prawie wszystkich) losów. Ale rozstrzyganie uczciwości loterii poprzez wykupienie wszystkich losów przypomina nieco metodę odróżniania banknotów fałszywych od prawdziwych na podstawie ich popiołu. Musimy wobec tego zadowolić się przekonaniem, opartym na statystyce i rachunku szans.

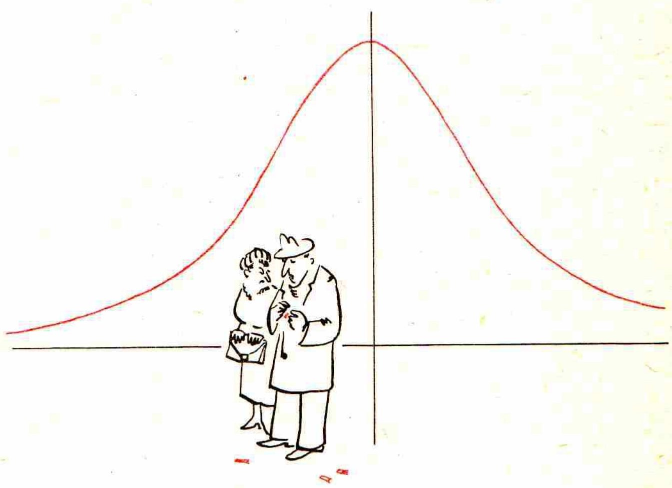
Załóżmy, że losów jest kilkaset, tak że ubytek kilku tylko w bardzo niewielkim stopniu zmienia stosunek pustych do pełnych. Pierwszy los daje nam 1/3 szans wygranej. Przy dwóch losach szansa dwukrotnej przegranej wynosi $2/3 \cdot 2/3 = 4/9$, a trzy kolejne losy są puste tylko w $(2/3)^3$ części przypadków. Przy zakupie n losów szansa choćby jednej wygranej jest równa

$$s_n = 1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^n.$$

Obliczmy kilka pierwszych s_n:

$$(2/3)^4 = 16/81 \approx 0{,}198$$
$$(2/3)^5 = 32/243 \approx 0{,}132$$
$$(2/3)^6 = 64/729 \approx 0{,}088$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(2/3)^{10} \approx 0{,}017$$
$$(2/3)^{11} \approx 0{,}012$$
$$(2/3)^{12} \approx 0{,}008$$
$$(2/3)^{13} \approx 0{,}005.$$

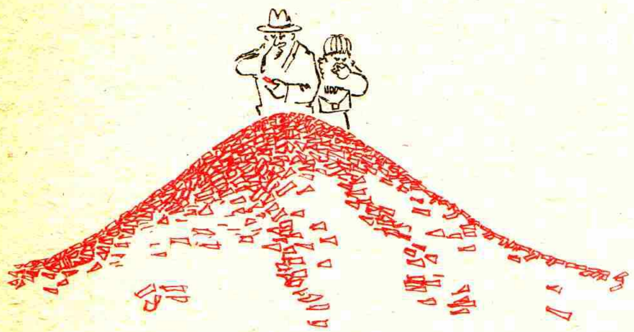
Widzimy, że dopiero $s_{12} \approx 0{,}992$ przekracza 99%. Gdybyśmy grali jednocześnie albo raz za razem na 1000 podobnych loteriach, najprawdopodobniej około 8 razy wyciągnęlibyśmy 12 kolejnych losów pustych.
Możemy powiedzieć tak: jeżeli 12 kolejnych losów loterii (w której podobno co trzeci los wygrywa) okaże się pustych, to albo mamy okropnego pecha, albo organizatorzy kłamią — przy czym ta druga ewentualność jest znacznie bardziej prawdopodobna. Mamy prawo mówić do znajomych: nie kupujcie losów tej loterii, bo jest nieuczciwa.

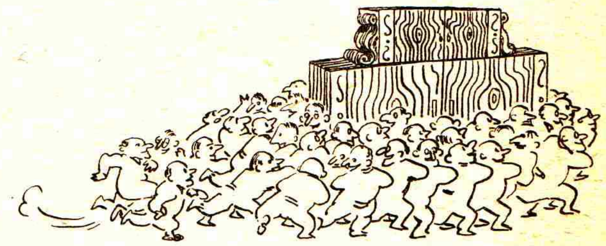


Zastosowaliśmy tutaj operację zwaną „weryfikacją hipotezy" (weryfikacja = sprawdzanie prawdziwości, hipoteza = przypuszczenie). Postawiliśmy hipotezę: „loteria jest uczciwa" i okazało się, po wyciągnięciu 12 kolejnych losów pustych, że jest to niemal nieprawdopodobne, można by powiedzieć: praktycznie niemożliwe. Gdyby zależało nam na „bardziej wiarygodnym dowodzie", należałoby, rzecz jasna, przebadać więcej losów.
Wiele procesów przypadkowych opisuje krzywa Gaussa, a raczej różne krzywe Gaussa. Według tych krzywych układają się odchylenia wzrostu ludzi od przeciętnej, długości ich stóp, rzeczywiste wagi „kilogramowych" toreb cukru, rzeczywiste rozmiary „takich samych" detali w zautomatyzowanym procesie produkcyjnym.

Z pewnością i zdolności matematyczne ludzi też podlegają takiemu samemu rozkładowi, choć nie wiadomo nam, czy ktoś to kiedyś badał. Gdybyśmy chcieli odpowiedzieć na pytanie: czy zdolności matematyczne poznaniaków są większe (przeciętnie rzecz biorąc) niż zielonogórzan, należałoby postąpić tak (zakładając, że przebadanie wszystkich mieszkańców tych ziem jest niemożliwe, oraz zakładając, że umiemy mierzyć zdolności matematyczne!). Wybrać losowo pewną liczbę osób z Zielonej Góry, zmierzyć ich zdolności matematyczne i nanieść wyniki na wykres. Można tak dobrać metodę pomiaru, by ułożyły się one według krzywej Gaussa. Poznaniacy dadzą nieco inną krzywą, a może zresztą taką samą. Teraz do pracy siądzie statystyk. Postawi hipotezę: zielonogórzanie — powiedzmy — nie są zdolniejsi od poznaniaków, i wyliczy, czy to twierdzenie jest do przyjęcia, czy też raczej te dwie różne krzywe Gaussa nie powstały po prostu za sprawą przypadku.
Procedurze „weryfikacji" muszą być poddane na przykład wszystkie twierdzenia nauk społecznych. Także wiele twierdzeń nauk przyrodniczych nie jest „stuprocentowo prawdziwych". Ocena stopnia prawdziwości głoszonych twierdzeń jest jednym z podstawowych zadań wszystkich nauk.

Red.: Badano nie raz — wyniki zależą jednak od tego, jak zdefiniować uzdolnienia matematyczne i jak się je mierzy.



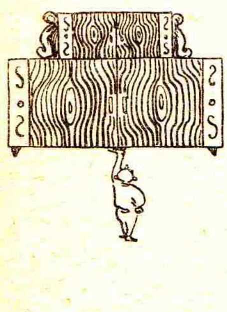


Jak wiadomo, nowoczesna organizacja pracy opierać się musi na matematyce. Tylko metody matematyczne pozwalają bowiem na obiektywną i optymalną ocenę sytuacji i wyciągnięcie odpowiednich wniosków. Nie od rzeczy będzie tu wspomnieć, że nawet nasz język potoczny traktuje zwrot „z matematyczną ścisłością" jako najwyższy superlatyw. A oto przykłady konkretnych sytuacji.

1. Jeden robotnik kopie studnię w ciągu 16 godzin. A więc co najmniej 3 dni musi trwać oczekiwanie obywatela-klienta na założenie mu tego urządzenia. Tymczasem rozwiązując proste równanie

$$1 \cdot 16 = 16 \cdot x$$

otrzymamy wniosek, że zorganizowanie 16-osobowych brygad pozwoli skrócić ten czas do 1 godziny ($x = 1$).



2. Czterech robotników wnosi pianino na III piętro w ciągu 15 minut. Tu możemy zaobserwować elastyczność metod matematycznych. Wychodząc bowiem z założenia, że dostarczanie pianin jest z ogólnospołecznego punktu widzenia sprawą nie najżywotniejszą, możemy wygospodarować tu wolne ręce do pracy. Zauważmy, że równanie

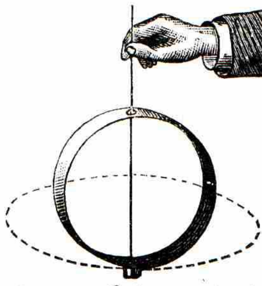
$$4 \cdot 15 = 1 \cdot x$$

ma rozwiązanie $x = 60$. A więc tylko 45 minut dłużej czekać będzie pianista na instrument, gdy skierujemy do noszenia pianin jednego robotnika, kierując trzech na bardziej odpowiedzialne miejsca pracy. Wychodząc z kolei z odmiennego założenia, że dążymy do podniesienia kultury na jak najwyższy poziom, możemy korzystając z równania

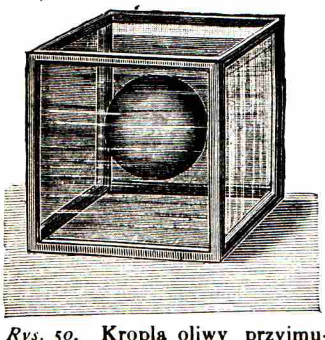
$$\frac{3}{4} = \frac{x}{60}$$

stwierdzić, że 60 robotników w ciągu tych samych 15 minut wniesie pianino aż na XLV piętro.
No dobrze, powiecie, są to żarty i do tego niezbyt mądre. Czyżby rzeczywiście? I czy np. uzależnianie długości trwania zielonego sygnału na przejściu dla pieszych od przeciętnej ilości przechodniów na tymże przejściu nie świadczy o przydatności tego rodzaju nie całkiem ścisłego formułowania zadań? Niemądre żarty? Rzeczywistość skłonni jesteśmy uznawać za rzecz poważną, mam wrażenie. Chyba żebyśmy zdecydowali, że nie.

Weźmy pasek papieru (odcięty np. z ćwiartki arkusza) na pół palca szerokości, i sklejmy jego dwa końce z sobą; otrzymamy pierścień papierowy. Postawmy ten pierścień pionowo i przyklejmy go u dołu kroplą gumy lub klajstru do małego koreczka. Na przeciwległym końcu pierścienia, u góry, zróbmy otwór dość szeroki, aby swobodnie wprowadzić drut, którego dolny koniec wtykamy przez ten pierścień w ów korek, do którego pierścień jest przyklejony (*rys. 49*). Jeżeli teraz ujmiemy za górny koniec drucika palcami i zaczniemy go w palcach skręcać, zobaczymy, iż cały pierścień, obracając się dokoła osi, wyobrażonej przez drucik, silnie się spłaszcza (jak wykazuje linja kropkowana na rysunku) i to bez względu, czy trzymamy pierścień ku dołowi, czy korkiem ku górze, lub cały drucik poziomo. Możemy to samo powtórzyć z kilkoma (2-ma, 3-ma i t. d.) pierścieniami skrzyżowanemi, t. j. złączonemi tak, aby wyobrażały kulę. —Za pomocą maszyny do wprowadzania w szybki ruch wirowy ciał, możnaby pokazać, iż tak samo spłaszczają się nawet żelazne i mosiężne obręcze. —Tak samo zupełnie spłaszcza się i kula, obracająca się wokoło swej osi. – Wiecie, że kropla oliwy wpuszczona do wody, wypływa na wierzch; lecz gdybyśmy przedtem dodali do wody spirytusu, który jest lżejszy od oliwy, możnaby wpuścić w sam środek takiej mieszaniny wody ze spirytusem kroplę oliwy i przekonać się, że ona wówczas nie wypłynie na powierzchnię cieczy, lecz pozostanie w środku i przyjmie kształt kulisty(*rys. 50*). Jeżeli do takiej kropli oliwy wstawimy drucik i zaczniemy go szybko, ale jednostajnie, bez wstrząśnień, obracać za pomocą maszynki do wprowadzania ciał w ruch obrotowy, to i kropla oliwy zacznie się również obracać, a wówczas łatwo dostrzeżemy, iż kulista dotąd kropla poczyna się spłaszczać u biegunów. Im prędzej obraca się pierścień lub kula, tem bardziej spłaszcza się przy biegunach.



Rys. 49. Spłaszczenie pierścienia przy obrocie.

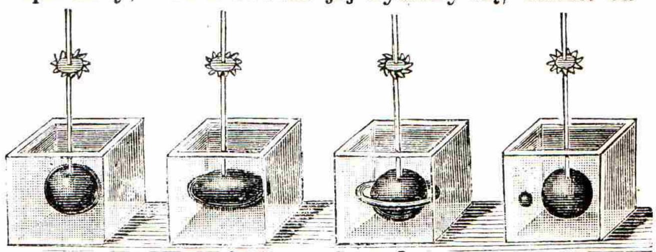


Rys. 50. Kropla oliwy przyjmuje kształt kulisty.

Wiecie już, że kula ziemska była niegdyś roztopioną masą; wirując ciągle, masa ta musiała się więc spłaszczyć przy biegunach; a gdy powierzchnia jej zastygła i utworzyła twardą skorupę, spłaszczenie pozostało, tak, że teraz ma już ziemia stale kształt sferoidy. (*Następuje, jak zwykle, streszczenie wykładu i pytania*).

Ile więc gwiazd na niebie, tyle światów całych. Świata całego poznać wcale nie można, bo jest on niezmierzony, nieskończony, złożony z niezliczonej ilości słońc i planet. Słońce nasze i wszystkie planety, krążące wkoło niego, a prawdopodobnie także i wszystkie gwiazdy, mają kształt kuli z dwóch końców spłaszczonej. Jak się taki kształt nazywa? Wszystkie te ciała były niegdyś albo są jeszcze masami palącemi się lub roztopionemi; wszystkie obracają się wokoło linji, łączącej dwa spłaszczone końce, czyli, jak powiadamy, obracają się wokoło swej osi i to, o ile wiemy, w jedną stronę — z zachodu na wschód, tak jak ziemia nasza. Wszystkie planety naszego systemu krążą wokoło słońca od zachodu na wschód, a wszystkie prawie księżyce wokoło planet obracają się również w jednym kierunku—z zachodu na wschód.

Widzicie więc, że pod wielu względami są wszystkie ciała niebieskie bardzo do siebie podobne. Czy to nie godne zastanowienia?— Czy przypominacie sobie, co się stanie z kroplą oliwy umieszczoną w wodzie zmieszanej ze spirytusem gdy ją poczniemy obracać wokoło jej osi? (Kropla przyjmie kształt kulisty, potem spłaszczy się u biegunów). Gdybyśmy ją dłużej i szybko obracali, wówczas więcej się spłaszczy, a za to równik jej wydłuży się, oddali od środka kropli i wreszcie na całym równiku oderwie się od kropli pierścień oliwy, który dalej wokoło kulistej kropli obraca się, jakby jeszcze był z nią złączony. Po pewnym czasie pierścień przerywa się i skupia tak, że tworzy małą kuleczkę oliwy, obracającą się wokoło swej osi i biegnącą dalej wokoło dużej kropli, tak, jak biegł przedtem wokoło niej pierścień, z której ta kulka powstała. (*Nauczyciel ilustruje to objaśnienie rysunkiem na tablicy według rys. 76*). Być może, że pierścień otaczający planetę Saturn, o której dziś mówiłem, oderwał się w ten sam sposób od niej. Być może, że gdy ten pierścień przerwie się i skupi, utworzy wtedy nowy, dziewiąty księżyc, biegnący wokoło Saturna, tak jak w naszem doświadczeniu mała kulka oliwy krąży wokoło dużej; być może, że wszystkie ośm księżyców Saturna w ten sam sposób powstały.



1 2 3 4

Rys. 76. Doświadczenie z kroplą oliwy obracaną wkoło jej osi.

Może księżyce i innych planet tak samo się od nich niegdyś oderwały; być może, że i nasz księżyc był kiedyś pierścieniem, który się oderwał od ziemi, gdy była jeszcze w stanie płynnym; a może i wszystkie planety w ten sam sposób oderwały się od swych słońc.

Małą Deltę opracowali: *Marek KORDOS i Michał SZUREK*