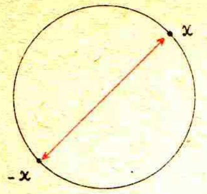
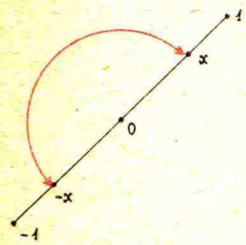
Jest tak, jak się nam wydaje: odcinek ma nieparzystą ilość punktów

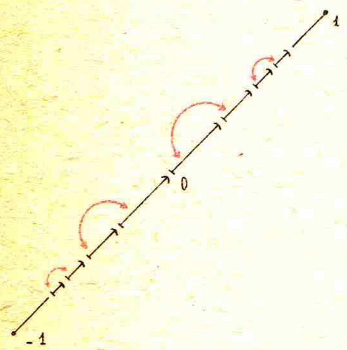
Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI



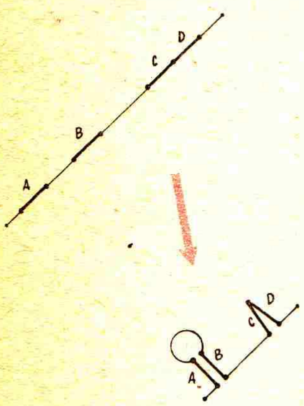
Rys. 1. Parzystość okręgu: jest jeszcze jeden sposób przekonania się o tym.



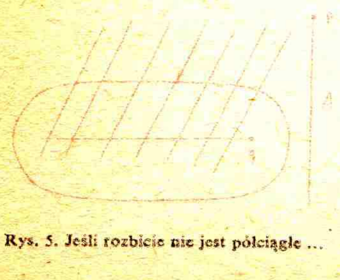
Rys. 2. Nieudana próba z odcinkiem.



Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5. Jeśli rozbicie nie jest półciągłe ...

— inaczej niż okrąg: o jego parzystości przekonujemy się łącząc w pary przeciwległe punkty.
Podobna próba dla odcinka (z końcami) zawodzi: jeśli np. odcinek o końcach -1 i 1 zegniemy na pół wokół 0, łącząc w pary punkty $-t$ i t, to punkt 0 pozostanie bez pary.
Nie widać tak od razu innych sposobów łączenia punktów odcinka w pary, chyba że go przedtem porozcinamy.
Np. jeśli ten sam odcinek podzielimy na nieskończenie wiele odcinków z jednym (np. lewym) końcem tak, by dotykały do siebie, i tak, by w punktach -1 i 1, i tylko w tych punktach, skupiało się nieskończenie wiele odcinków (rys. 3), to łącząc jakkolwiek w pary odcinki podziału i nasuwając w każdej parze jeden odcinek na drugi (powiększając lub zmniejszając go przedtem przez podobieństwo), połączymy w pary wszystkie punkty z wyjątkiem -1 i 1, ale te tworzą znowu parę.
Nie umiemy pomyśleć tego łączenia w pary jako sklejania odcinka bez uprzedniego rozcinania.
Nie rezygnujmy mimo to z szukania sklejeń dwukrotnych odcinka; tak nazwiemy te łączenia w pary punktów odcinka, które można pomyśleć (nie zwolni to od podania później ścisłego określenia) jako sklejania odcinka bez uprzedniego rozcinania.

*

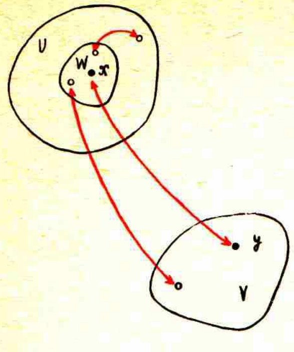
Inna próba. Sklejamy parami pododcinki, rozłączne lub mające wspólny koniec, przez nałożenie jednego na drugi przez podobieństwo. Przypadek, kiedy odcinki jednej pary dają całość, mamy za sobą. Rys. 4 ilustruje typową nową sytuację: odcinek A skleja się z odcinkiem B (odcinki te są rozłączne), a odcinek C z odcinkiem D, mającym z C wspólny koniec, zginając odcinek wokół tego wspólnego końca; ten wspólny koniec nie skleja się z żadnym innym punktem. Suma odcinków A i B jest rozłączna z sumą odcinków C i D, bo inaczej pewne trzy punkty byłyby sklejone. Wynik sklejenia pokazany jest w drugiej części rysunku. Przyjmijmy, że odcinki ze sklejających się par nie są zawarte w żadnych większych sklejających się przez podobieństwo. Jest to początek próby, która dalej wygląda tak, że pewna nowa para odcinków, poza sumą dotychczas sklejonych, skleja się ze sobą jednym z opisanych sposobów, zależnie od tego czy odcinki te stykają się końcami, czy nie. Pomyślmy teraz sytuację skrajną, kiedy poza sumą posklejanych odcinków nie ma odcinków. Ta pozostałość plus końce posklejanych odcinków jest zbiorem rzadkim (tak nazywa się zbiory domknięte nie zawierające odcinków). Składa się na nią zbiór homeomorficzny ze zbiorem Cantora i punkty izolowane (punkty wspólne odcinków takich, jak C i D). Punkty tej pozostałości trzeba teraz posklejać po dwa. Czy to się da zrobić bez rozrywania figury, którą już mamy?
Trudno mieć od razu jakieś zdanie, bo wyszliśmy poza znane sytuacje geometryczne. Nie da się pójść dalej nie wyjaśniając, co rozumie się przez sklejanie figury bez uprzedniego jej rozcinania czy rozrywania.
Aby skleić figurę geometryczną, trzeba mieć wpierw jej *rozbicie*, tj. przedstawienie jej jako sumy podzbiorów rozłącznych, aby wiedzieć, które punkty sklejać z którymi: punkty sklejamy ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego samego elementu rozbicia. Aby sklejanie nie wymagało przedtem rozcinania (rozrywania) figury, rozbicie nie może być całkiem dowolne, np. takie jak rozbicie na pary przedstawione na rys. 3.
Rozbicie nazywane jest *półciągłym*, jeśli dla każdego zbioru domkniętego suma elementów rozbicia mających punkty wspólne z tym zbiorem jest zbiorem domkniętym; w szczególności, elementy rozbicia półciągłego są zbiorami domkniętymi, bo przez punkt przechodzi jeden element rozbicia, a zbiory jednopunktowe są domknięte. Jak wiele rzeczy, także i półciągłość widzi się najlepiej tam, gdzie jej nie ma.
Jeśli rozbicie nie jest półciągłe, to istnieje zbiór domknięty F taki, że suma S elementów rozbicia mających punkty wspólne z F nie jest zbiorem domkniętym. Znaczy to, że istnieje punkt p rozważanej figury, będący punktem skupienia zbioru S i nie należący do S. Element A rozbicia, do którego należy punkt p, omija zbiór F; co więcej, omija on pewną kulę wokół F (rys. 5; rysunek ten zwalnia z tłumaczenia tego, czym jest kula wokół zbioru, chociaż nie zwolni z wytłumaczenia się z istnienia kuli, o której była mowa). Dowolnie blisko punktu p są punkty zbioru S, a więc punkty sklejające się z punktami zbioru F; te punkty zbioru F mają punkt skupienia q w zbiorze F i ten punkt q nie skleja się z punktem p, bo p nie skleja się z żadnym punktem zbioru F. Nie można pomyśleć takiego sklejania bez rozerwania figury w punkcie p.
Rozumowań motywacyjnych prawie się nie spotyka w pracach z matematyki, przez co wyniki w nich zawarte są jak góry lodowe, które znamy jedynie z wierzchołków. Jest to reżym narzucony częściowo przez modę: elegancja może tu sąsiadować z szablonem. W artykule tego rodzaju nie musimy się takiego reżymu trzymać.

Rozumowanie motywacyjne, które przeprowadziliśmy, daje nam tyle, że jeśli będziemy już mieli dowiedzione

Twierdzenie. *Nie istnieją rozbicia półciągłe odcinka na zbiory dwupunktowe,*

to będziemy mogli to twierdzenie rozumieć. Jak? Właśnie tak, że nie można skleić odcinka, uprzednio go nie rozrywając, i sklejać po dokładnie dwa punkty. Okrąg można (teraz to precyzujemy), bo rozbicie z rys. 1 jest półciągłe (co wymaga sprawdzenia).

Rozumowanie to ma jednak swoją wartość dopiero wtedy, kiedy figura jest *przestrzenią zwartą*, z czego korzystaliśmy m.in. (kiedy po raz drugi?) twierdząc, że zbiór domknięty omijający zbiór domknięty F omija pewną kulę wokół F. Odcinek jest zwarty; zwarte są też jego podzbiory domknięte.

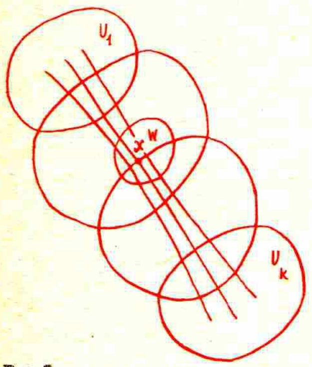


Rys. 6.

Dobrze jest przeformułować warunek półciągłości rozbicia przez prawa de Morgana (przejście do dopełnień). Brzmi on wtedy: dla każdego zbioru otwartego suma elementów rozbicia zawartych w tym zbiorze jest zbiorem otwartym.

Teraz widać od razu, że jeśli A jest elementem rozbicia półciągłego, U jest zbiorem otwartym zawierającym A i x jest punktem zbioru A, to istnieje otoczenie W punktu x takie, że jeśli element rozbicia ma punkty w zbiorze W, to jest zawarty w U.

Dla wyjaśnienia: *otoczenie punktu*, to zbiór otwarty, do którego ten punkt należy.



Rys. 7.

*

Wyjaśniając półciągłość nie ograniczyliśmy się do rozbić odcinka i do rozbić na zbiory dwupunktowe. Są dwa powody: 1. dalej pojawią się inne niż odcinek przestrzenie zwarte i rozbicia niekoniecznie na zbiory dwupunktowe; 2. na rzeczy nie można patrzeć zbyt wąsko, jeśli chce się je rozumieć, a znakomite wyjątki, np. owego jabłka, które wystarczyło dla uchwycenia prawa grawitacji, jedynie unaoczniają tę prawdę.

Niebanalne sytuacje matematyczne (miejmy nadzieję, że te, o których tu mowa, są takimi) nie boją się wszakże ostrego światła przypadków szczególnych. Odnotujmy więc fakt, dotyczący rozbić półciągłych na zbiory dwupunktowe, wynikający bezpośrednio z ostatniego stwierdzenia.

(I) Jeśli $\{x, y\}$ jest elementem rozbicia, U jest otoczeniem punktu x i V jest otoczeniem punktu y, to istnieje otoczenie W punktu x zawarte w U takie, że każdy element rozbicia mający punkt w W ma swój drugi punkt w U lub w V.

Najlepiej widzieć to tak: jeśli zbiory U i V są małe (p. rys. 6), to elementy rozbicia mające punkty dostatecznie blisko x są albo małe, zawarte w U, albo od razu duże, bo mające swoje drugie punkty w V.

W szczególności,

(I′) Jeśli zbiory U i V są rozłączne i zbiór U nie zawiera całych elementów rozbicia, to każdy element rozbicia mający punkt w W ma swój drugi punkt w V, a odwzorowanie h przyporządkowujące punktowi x' zbioru W drugi punkt w elemencie rozbicia, do którego punkt x' należy, jest homeomorfizmem zbioru W na zbiór $h(W)$.

Część końcowa tego stwierdzenia (o homeomorfizmie) nie mieści się w stwierdzeniu (I). Nie dowodząc jej (bo dowód nietrudny), zwróćmy jednak uwagę na ostrożne sformułowanie na samym końcu.

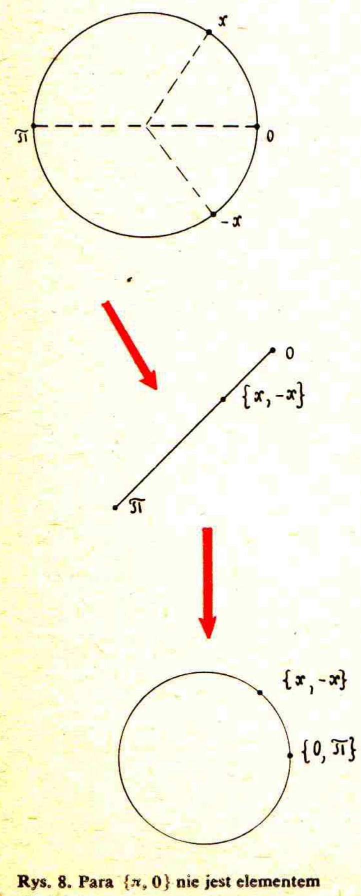
*

Element A rozbicia nazywany jest elementem ciągłości, jeśli dla każdej rodziny skończonej $\{U_1, \ldots, U_k\}$ zbiorów otwartych takich, że (rys. 7)

(1) $A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k$ i (2) $A \cap U_j \neq \phi$ dla każdego j,

i każdego punktu x ze zbioru A istnieje otoczenie W punktu x takie, że elementy rozbicia mające punkt w W są zawarte w $U_1 \cup \ldots \cup U_k$ i mają punkty w każdym U_j (spełniają więc, jak A, warunki (1) i (2)), a ich suma jest zbiorem otwartym (zawierającym A).

Znaczy to m.in., że jeśli element rozbicia jest dostatecznie bliski jakiemuś punktowi z elementu ciągłości, to jest bliski w stopniu danym z góry wszystkim punktom z tego elementu ciągłości.



Rys. 8. Para $\{\pi, 0\}$ nie jest elementem ciągłości.

Różnicę między elementami ciągłości a innymi (w rozbiciach półciągłych) zobaczmy na przykładach rozbić na zbiory dwupunktowe.

Jeśli okrąg zegniemy na pół wokół średnicy, łącząc w pary punkty odpowiadające kątom x i $-x$, jak na rys. 8, a potem końce tej średnicy skleimy ze sobą, to dokonamy jeszcze jednego sklejenia dwukrotnego okręgu (półciągłość odpowiadającego temu sklejeniu rozbicia wypadałoby sprawdzić), w którym para złożona z końców średnicy nie jest elementem ciągłości.

To, że $\{\pi, 0\}$ nie jest elementem ciągłości wynika m.in. stąd, że jeśli W jest dostatecznie małym otoczeniem punktu 0, to suma elementów mających punkty w W nie jest zbiorem otwartym, mając punkt izolowany π. Ale wystarczyłoby i takie kryterium:

(II) Jeśli $\{x, y\}$ jest elementem rozbicia na zbiory dwupunktowe i każde otoczenie punktu x zawiera całe elementy rozbicia, to $\{x, y\}$ nie jest elementem ciągłości.

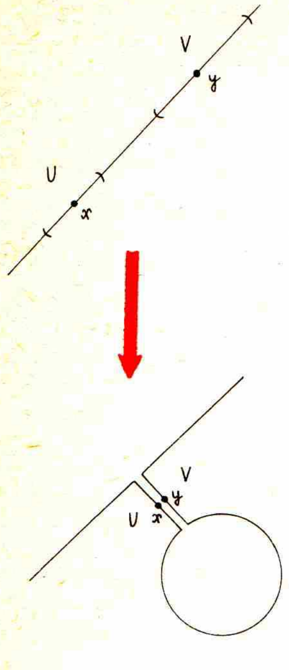
Kryterium to jest zamieszczone nie po to, by dać drugi dowód prostego faktu (nasuwałoby to wątpliwości co do wartości pierwszego dowodu), ale dlatego, że się przyda dalej.

Inne elementy rozbicia (okręgu) z rys. 8 są elementami ciągłości. Rozbicia (okręgu) z rys. 1 i (odcinka) z rys. 2 mają same elementy ciągłości.

Popatrzmy teraz ogólnie na rozbicia półciągłe na zbiory dwupunktowe:

(III) Jeśli $\{x, y\}$ jest elementem ciągłości rozbicia, to dla każdego otoczenia V punktu y istnieje otoczenie W punktu x takie, że każdy element rozbicia mający punkt w W ma swój drugi punkt w V, a odwzorowanie h przyporządkowujące punktowi x' zbioru W drugi punkt w elemencie rozbicia, do którego punkt x' należy, jest homeomorfizmem zbioru W na zbiór $h(W)$ i zbiór $h(W)$ jest otwarty.

Inaczej (chociaż nie oddając całej treści): sklejenie dwukrotne polega w pobliżu punktów x i y stanowiących element ciągłości na sklejeniu przez homeomorfizm pewnych otoczeń punktów x i y.



Rys. 9. Sklejanie dwukrotne w pobliżu elementu ciągłości.

Dowód stwierdzenia (III) nie zawiera innych trudności niż dowody poprzednie, ale trwa dłużej. Wystarczy go robić dla zbiorów V rozłącznych z pewnym otoczeniem U punktu x. Rodzina dwuelementowa $\{U, V\}$ spełnia warunki (1) i (2) dla $\{x, y\}$. Zbiór W dobieramy dla $\{U, V\}$ i x na mocy warunku ciągłości. Ten dobór zbioru W zapewni to, że $h(W)$ (h określa się tak, jak to było robione poprzednio) będzie zbiorem otwartym.

*

Głównym w teorii rozbić półciągłych jest

Twierdzenie. *Rozbicie półciągłe przestrzeni zwartej (metrycznej) ma elementy ciągłości.*

Twierdzenie to jest odpowiednikiem twierdzenia Baire'a o istnieniu punktów ciągłości funkcji rzeczywistej i ma z nim wspólny rodowód w twierdzeniu Baire'a (bardziej znanym), że przestrzeń metryczna zupełna (tym bardziej zwarta) nie może być sumą przeliczalnie wielu podzbiorów rzadkich. Twierdzenie należy do Kuratowskiego i można je znaleźć w „*Topologie II*" na str. 38 wydania z r. 1950. Nie będziemy tu dowodzić tego twierdzenia. Sama teoria rozbić półciągłych została zapoczątkowana w latach dwudziestych przez Aleksandrowa i Moore'a.

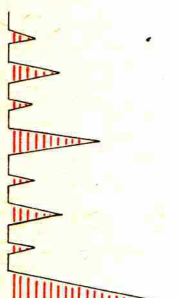
Rozbicie półciągłe pozostanie półciągłym, jeśli je ograniczyć do podzbioru domkniętego. Ponieważ zbiory domknięte są zwarte, wobec zwartości rozważanych przestrzeni, więc rozbicie ograniczone do podzbioru domkniętego będzie miało elementy ciągłości na mocy sformułowanego twierdzenia. Jest to bardzo ważna okoliczność (i jednocześnie nie bardzo ważna, bo wynikająca z prostej obserwacji). Wynika stąd m.in., że elementy ciągłości rozbicia półciągłego przestrzeni zwartej wypełniają jej podzbiór gęsty. Stąd, wobec (III), sklejenia dwukrotne odcinka muszą być wszystkie takie jak te, które rozważaliśmy w próbie zwanej inną, ilustrowanej na rys. 4.

Wtedy po sklejeniu ze sobą przez homeomorfizmy przedziałów, trzeba skleić ze sobą pozostałość, na którą składa się zbiór Q homeomorficzny ze zbiorem Cantora i punkty izolowane, po nie więcej niż jednym w każdym przedziale dopełniającym do Q. Ta pozostałość jest już wszakże częsciowo sklejona: sklejone są ze sobą po dwa końce przedziałów dopełniających do Q; mogą się przy tym sklejać końce tego samego przedziału (sytuacja z odcinkami C i D na rys. 4), lub końce dwu różnych (więc rozłącznych) przedziałów (sytuacja z odcinkami A i B na tymże rysunku).

Jeśli ograniczyć rozbicie do zbioru P równego wspomnianej pozostałości pomniejszonej o pary punktów izolowanych sklejających się ze sobą (zbiór P jest zwarty), to każdy element rozbicia zbioru P ma punkt w Q.

(IV) Jeśli $\{x, y\}$ jest elementem rozbicia i x jest punktem zbioru Q, to w każdym przedziale wokół x są zawarte całe elementy rozbicia.

Jeśliby (IV) było nieprawdą, to wobec (I') pewien przedział wokół x sklejałby się przez homeomorfizm z pewnym przedziałem wokół y (obrazem homeomorficznym przedziału wokół x). Sprzeczność, bo x leżąc w Q, leży poza wszelkimi przedziałami sklejającymi się przez homeomorfizm.


Rys. 10. Takie sklejanie odcinka nie doprowadzi do sklejenia dwukrotnego.

Z (IV) wynika niemożliwość pomyślanego przez nas sklejania.

Bo skoro w każdym przedziale wokół dowolnego punktu x zbioru Q są całe elementy rozbicia całości odcinka, to są również i całe elementy rozbicia ograniczonego do P; bo pary punktów sklejających się (jeśli nie mielibyśmy ich od razu) pojawiłyby się na dowolnie drobnych przedziałach dopełniających do Q i skupiających się przy punkcie x; wtedy końce tych przedziałów, należące już do P, musiałyby się sklejać ze sobą.

Stąd, na mocy (I') i tego, że każdy element rozbicia zbioru P ma punkt w Q, żaden z elementów rozbicia zbioru P nie jest elementem ciągłości. Przeczy to twierdzeniu o istnieniu elementów ciągłości.

*

Dowód nieparzystości odcinka został w ten sposób zakończony.

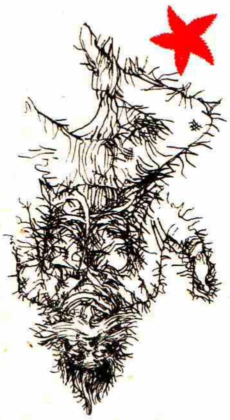
Było w nim jedno delikatne miejsce. Brak otwartości zbioru $h(W)$ w stwierdzeniu (I') nie przeszkodził nam w dojściu do sprzeczności poprzez dowiedzione wpierw stwierdzenie (IV). Obraz homeomorficzny przedziału jest w tak oczywisty sposób (czyżby?) zbiorem otwartym na odcinku, że nie myślimy o trudnościach, które by się pojawiły, gdybyśmy podobnym rozumowaniem chcieli dowieść np. nieparzystości dysku (domkniętego) lub dendrytu; jeśliby dendryt miał nieskończenie wiele końców, trudności byłyby nie do pokonania.

*

Dygresja. Trochę ich było, ale jeszcze jedna na koniec.
Dlaczego tak okrężnie formułowaliśmy wynik? Pomińmy pretensjonalny tytuł, bo to nieważne. Dlaczego by nie napisać wprost, że nie ma odwzorowań ciągłych dwukrotnych z odcinka (bo chyba o to chodziło?). Dlatego, że wtedy trzeba by powiedzieć w co, i rzecz stałaby się kłopotliwa z całkiem błahego powodu. Oto dla wygody formalnej pojawiło się w działach ogólnych topologii wiele mniej realnych bytów, przez co nabrało sensu mówienie o ciągłości odwzorowania także i tam, gdzie to już nie ma znaczenia: każde odwzorowanie *staje się ciągłe*, jeśli w zbiorze wartości *uznać za otwarte* odpowiednio mało zbiorów. Np. biorąc jakiekolwiek rozbicie odcinka na zbiory dwupunktowe, np. takie jak to z rys. 3, lub całkiem nie kontrolowane przez wyobrażenia, robione za cenę pewnika wyboru, i biorąc pod uwagę odwzorowanie przyporządkowujące punktom odcinka elementy rozbicia, w których te punkty leżą, dostajemy odwzorowanie dwukrotne, które *stanie się ciągłe*, jeśli w zbiorze złożonym z elementów rozbicia *uznać za otwarte* jedynie takie zbiory, dla których sumy elementów do nich należących są zbiorami otwartymi na odcinku. Widać małą wartość takiego rozwiązania.

Od kłopotów z bytami wprowadzanymi dla wygód formalnych nie są wolne i inne działy matematyki: wygody, jakie mogłoby dawać zero, czyż nie są zniweczone przez kłopoty, jakie mamy wtedy, kiedy chcemy przez to zero podzielić?

*



Twierdzenie o nieparzystości odcinka zostało dowiedzione przez O. G. Harrolda, *Duke Mathematical Journal* **5** (1939), str. 475—486. Potem P. Civin, tamże **10** (1943), str. 49—57, wykazał nieparzystość kostek euklidesowych (domkniętych) wymiaru $\leqslant 3$ oraz, że na sferach do wymiaru 3 włącznie nie ma innych sklejeń dwukrotnych oprócz tych, które od razu widzimy. Kostki euklidesowe wyższych wymiarów okazały się też nieparzyste, co pokazał A. W. Czernawski, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **144** (1962), str. 286—298.

P. S. Kostka Hilberta, która raz zachowuje się jak kostka (odwzorowania ciągłe kostki Hilberta w siebie mają punkty stałe), a raz jak sfera (jest jednorodna), okazuje się parzysta, ale autor tego artykułu nie umie tego pokazać inaczej niż przez łatwe zastosowanie trudnego twierdzenia o tym, że produkt dendrytu i kostki Hilberta jest kostką Hilberta. Dowody nieparzystości kostek euklidesowych są trudne w sposób prawdziwy, polegając na niebanalnym stosowaniu trudnych twierdzeń o zbiorach punktów stałych inwolucji ciągłych na sferach. Liczba 2 okazuje się wyjątkowa: bez trudu buduje się rozbicia półciągłe odcinka (kwadratu, kostki etc.) na same zbiory trójpunktowe etc.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 175. Niech a, b, c będą takimi liczbami całkowitymi, że liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 6. Udowodnić, że liczba $a^3+b^3+c^3$ jest podzielna przez 6.
Rozwiązanie na str. 12

M 176. Określić w zbiorze dwuelementowym $X = \{a, b\}$ dwa działania $\bigcirc$ i $\square$, przy czym $\square$ ma być działaniem nieprzemiennym, ale rozdzielnym obustronnie względem działania $\bigcirc$.
Uwaga. Działaniem (w zbiorze X) nazywamy każdą funkcję $f\colon X\times X \to X$. Mówimy, że działanie $\bigcirc$ jest rozdzielne obustronnie względem $\square$, gdy dla wszelkich (niekoniecznie różnych) x, y, $z \in X$ jest

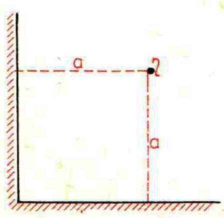
$$x \square (y \bigcirc z) = (x \square y) \bigcirc (x \square z),$$

$$(y \bigcirc z) \square x = (y \square x) \bigcirc (z \square x).$$

Rozwiązanie na str. 2

M 177. Znaleźć liczbę par uporządkowanych podzbiorów rozłącznych zbioru $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI



F 59. Dwie półpłaszczyzny metalowe stykają się pod kątem prostym (rysunek). Wewnątrz kąta dwuściennego utworzonego przez te półpłaszczyzny, równolegle do wspólnej krawędzi biegnie jednorodnie naładowany cienki drut. Gęstość liniowa ładunku na drucie (czyli ładunek przypadający na jednostkę długości) wynosi η. Odległości drutu od półpłaszczyzn metalowych są jednakowe i wynoszą a. Wyznacz wielkość i kierunek siły działającej na jednostkę długości drutu (XXVII Olimpiada Fizyczna, zawody stopnia II).
Rozwiązanie na str. 10