O nicowaniu i sklejaniu powierzchni i co z tego może wyniknąć

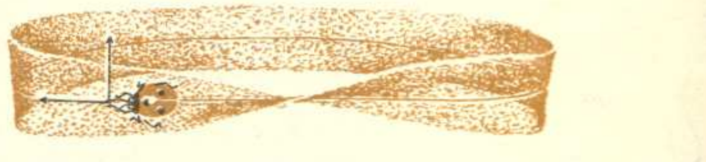
Doc. dr Andrzej SZYBIAK

Skutki życzliwości dla zwierząt

Obserwując modele fizyczne powierzchni przyzwyczailiśmy się do wyróżniania na nich dwóch stron. Wiemy, że biedronka chcąca przejść z jednej strony paska papieru na drugą musi przejść przez jego kraj. Ułatwimy jej to zadanie, skręcając jeden brzeg paska o kąt półpełny i łącząc go z przeciwległym brzegiem, jak to pokazano na rysunku. Przechodząc przez odcinek AB, teraz już utożsamiony z odcinkiem $A'B'$, biedronka przejdzie na drugą stronę paska. Tak by się mogło wydawać. Ale czy możemy mówić, że pasek $ABA'B'$ po takim złączeniu boków AB i $A'B'$ ma jeszcze dwie strony? Wykonajmy model i spróbujmy zakreskować jedną jego stronę pozostawiając drugą nie zakreskowaną. Stwierdzimy, że rozpoczynając kreskowanie od dowolnego miejsca zakreskujemy całą otrzymaną powierzchnię. Dlatego mówimy, że ta powierzchnia — nazywamy ją wstęgą Möbiusa — jest jednostronna.

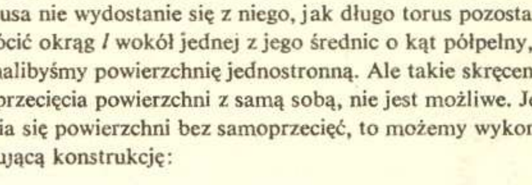
Utrata orientacji

Nie siląc się na ścisłą i ogólną definicję jednostronności podamy jeszcze jedną własność wstęgi Möbiusa. Połączmy środki odcinków AB i $A'B'$ odcinkami po jednej i po drugiej stronie paska $ABA'B'$. Po zrobieniu z paska wstęgi $\mathscr{M}$, a więc po utożsamieniu odcinka AB z odcinkiem $A'B'$, oba te odcinki utworzą zamkniętą krzywą, którą możemy nazwać równikiem wstęgi $\mathscr{M}$. Jeżeli w dowolnym punkcie C równika ustalimy parę wektorów u_0, w_0 takich, że u_0 jest styczny do równika, a w_0 do niego prostopadły, i układ ten będziemy przesuwać wzdłuż równika tak, aby u_0 pozostawał do równika styczny, to po obejściu całego równika doprowadzimy parę (u_0, w_0) do pary (u_1, w_1) takiej, że $u_1 = u_0$ i $w_1 = -w_0$. O układach (u_0, w_0) i (u_1, w_1) mówimy, że są przeciwnie zorientowane. A więc na $\mathscr{M}$ można od układu wektorów przejść w sposób ciągły do układu przeciwnie zorientowanego (co nie jest możliwe np. na płaszczyźnie).



Nie będziemy nabijać w butelkę!

Podamy teraz inny przykład jednostronnego tworu dwuwymiarowego, nie będącego powierzchnią w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wyobraźmy sobie powierzchnię boczną walca ograniczoną dwoma okręgami k i l. Jeżeli zegniemy ten walec i złączymy wprost ze sobą okręgi k i l, to otrzymamy coś na kształt dętki, co się uczenie nazywa torusem. Biedronka zamknięta wewnątrz takiego torusa nie wydostanie się z niego, jak długo torus pozostanie torusem. Gdyby jednak udało się obrócić okrąg l wokół jednej z jego średnic o kąt półpełny, a potem złączyć go z okręgiem k, otrzymalibyśmy powierzchnię jednostronną. Ale takie skręcenie walca bez rozerwania go, albo przecięcia powierzchni z samą sobą, nie jest możliwe. Jeżeli jednak przyjmiemy możliwość przenikania się powierzchni bez samoprzecięć, to możemy wykonać (oczywiście w wyobraźni) następującą konstrukcję:



Rozdymamy walec do kształtu zbliżonego do szkiełka od naftowej lampy o wydłużonej szyjce, następnie szyjkę tę odginamy, przeprowadzamy przez ściankę boczną bez przecinania się, a następnie łączymy z dolnym otworem. Otrzymany twór nie jest powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej i jego model fizyczny nie da się wykonać. Nazywamy go butelką Kleina. Rysunek obok pomoże nam wyrobić sobie pewien pogląd na jej strukturę. Przedstawia on (nie adekwatnie) jedną z połówek butelki Kleina. Sklejając ją z drugą symetryczną do niej połówką, tak jak muszlę szczeżui, otrzymamy powierzchnię obrazującą do pewnego stopnia butelkę Kleina. Co to znaczy do pewnego stopnia? To znaczy, że biedronka łażąca — powiedzmy — we wnętrzu szyjki mogłaby przejść przez ściankę bańki w miejscu przenikania, i poruszając się dalej, mogłaby przejść do „bańkowej" części butelki. Dalsze wędrówki biedronki nie znającej przeszkód tam, gdzie ścianki się przenikają bez samoprzecięć, mogą doprowadzić ją do dowolnego punktu butelki Kleina.

Konstrukcję butelki tej można ująć ściśle stosując metody współczesnej matematyki — albo na gruncie topologii, albo stosując metody geometrii różniczkowej. Interpretujemy butelkę Kleina jako pewną powierzchnię w pięciowymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wyczerpujące opisanie sposobów zaprowadziłoby nas jednak za daleko, przynajmniej na razie.

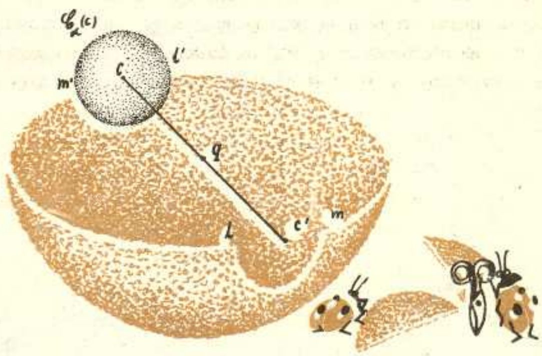
Budujemy nowy świat

Rozważając wstęgę Möbiusa i butelkę Kleina nie zastanawialiśmy się nad jakimikolwiek metrycznymi strukturami tych przestrzeni. Poniżej podamy konstrukcję pewnej przestrzeni metrycznej o własnościach zasadniczo odmiennych od własności płaszczyzny euklidesowej. Weźmy pod uwagę połówkę sfery o środku q wraz z jej brzegiem, który jest kołem wielkim. Połówkę sfery bez brzegu oznaczmy przez P, a P wraz z brzegiem przez E. Ustalmy jednostkę miary kątowej. Wprowadzimy na P następującą funkcję ϱ pary punktów: Jeżeli $a, b \in P$, to za $\varrho(a, b)$ przyjmujemy miarę kąta pomiędzy półprostymi qa i qb. Bez względu na to, jaką jednostkę miary kątowej przyjmiemy, widzimy, że funkcja ϱ ma następujące własności:

1° $\varrho(a, a) = 0$ z $\varrho(a, a') = 0$ wynika, że $a = a'$.

2° Dla dowolnych punktów $a, b, c \in P$ mamy $\varrho(a, b) + \varrho(c, b) \geqslant \varrho(a, c)$. (Dla dowodu wystarczy rozważyć trójścian o krawędziach qa, qb, qc).

3° ϱ spełnia nierówność $0 \leqslant \varrho(a, b) < m$, gdzie m jest równe mierze kąta półpełnego. A więc ϱ spełnia warunki wymagane od metryki i P z tak określoną metryką staje się przestrzenią metryczną. W dalszych rozważaniach przyjmiemy taką jednostkę miary, by $m = 1$. (Taką samą metrykę moglibyśmy zresztą otrzymać wychodząc od pojęcia odległości „bliskich" punktów jako długości łączącego te punkty łuku koła wielkiego na sferze o promieniu $\frac{1}{2\pi}$).



Ustalmy teraz na brzegu punkt c i antypodyczny do niego punkt c'. Oznaczając przez $\mathscr{C}_\alpha(a)$ otwartą kulę o środku a i promieniu α usuniemy z E zbiory $E \cap \mathscr{C}_\alpha(c)$ i $E \cap \mathscr{C}_\alpha(c')$. Jeżeli wybierzemy α dostatecznie bliskie zeru, to po takim usunięciu zawsze coś dla dalszych rozważań pozostanie. Wyobraźmy więc sobie, że mamy wykonany z elastycznego tworzywa model tego, co zostało. Naciągamy „uszy" ograniczone łukami lm' i ml' i sklejamy je tak, by punkty diametralnie przeciwległe (antypodyczne) zostały ze sobą złączone. Otrzymamy powierzchnię przypominającą koszyczek o skręconym — jak wstęga Möbiusa — uchu. Biedronka łażąca po powierzchni takiego koszyczka miałaby takie same możliwości poruszania się po całej powierzchni jak na tamtej wstędze.

Oznaczmy utworzoną powierzchnię przez Z_α. Odpowiedniość między punktami zbioru $P \setminus (\mathscr{C}_\alpha(c) \cup \mathscr{C}_\alpha(c'))$ a punktami zbioru Z_α jest wzajemnie jednoznaczna.
Oznaczmy odwzorowanie $P \setminus (\mathscr{C}_\alpha(c) \cup \mathscr{C}_\alpha(c'))$ w Z_α przez f, a odwrotne do niego przez h.
Odwzorowanie f daje się z łatwością rozszerzyć w sposób ciągły na domknięcie zbioru $P \setminus (\mathscr{C}(c) \cup \mathscr{C}_\alpha(c'))$, przy czym obrazy w odwzorowaniu f punktów antypodycznych są identyczne.
Określamy funkcję d przyjmując dla $a, b \in Z_\alpha$
$d(a, b) =$ miara nie większego z kątów, które tworzą proste $qh(a)$ i $qh(b)$.
Stwierdzamy z łatwością, że d jest funkcją ciągłą na domknięciu Z_α i — wobec utożsamienia punktów antypodycznych na brzegach ,,uszu" — funkcja ta obok nierówności trójkąta spełnia warunek

$$d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ na } Z_\alpha.$$

A więc Z_α z tak określoną odległością jest przestrzenią metryczną.
Rozważmy ciąg wartości α_n malejący do zera. Odpowiadał mu będzie ciąg przestrzeni metrycznych Z_{α_n} taki, że $Z_{\alpha_1} \subset Z_{\alpha_2} \subset \ldots \subset Z_{\alpha_k} \subset Z_{\alpha_{k+1}}$. Przestrzeń graniczna w tym przypadku istnieje, ale nie da się ona przedstawić w postaci powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Możemy uznać, że jest to połówka sfery, w której dokonano utożsamienia punktów średnicowo sprzężonych, a metrykę oparto na mierze kątowej.
Wyżej skonstruowana przestrzeń metryczna nazywa się dwuwymiarową przestrzenią eliptyczną Riemanna. Będziemy ją oznaczać przez Z. Wiemy już, że od płaszczyzny euklidesowej różni się ona tym, że:
i) odległość dwóch punktów na Z nie przekracza liczby 1 (przy przyjętej przez nas wyżej jednostce miary).
ii) Z, podobnie jak płaszczyzna euklidesowa, nie ma brzegu, a w przeciwieństwie do płaszczyzny euklidesowej ma tylko jedną stronę. Jeżelibyśmy umieścili na modelu fizycznym przestrzeni Z_α biedronkę, to wędrując po tym modelu może ona zawsze zajść w położenie będące lustrzanym odbiciem poprzedniego, nie przechodząc przy tym przez żadną krawędź. Tę samą własność będzie mieć przestrzeń Z jako granica wstępującego ciągu przestrzeni Z_{α_n}.
Dla dalszych rozważań określimy na Z linie proste. Mianowicie przez prostą w przestrzeni Z będziemy rozumieć bądź obraz w odwzorowaniu f łuku koła wielkiego na półsferze, przy czym końce tego łuku utożsamiamy, bądź też obraz w odwzorowaniu f brzegu półsfery, w którym pary punktów antypodycznych uważamy za jeden punkt. Przyjmując taką definicję widzimy, że każda prosta w przestrzeni Z ma skończoną długość, przy naszej jednostce miary równą 1. Co więcej, każda taka prosta jest linią zamkniętą, tak jak okrąg euklidesowy. Jeżeli więc na prostej w przestrzeni eliptycznej ustalimy dwa różne punkty, to podzielimy ją na dwa odcinki, a nie jak w przypadku euklidesowym na odcinek i dwie półproste. Wobec tego, jeżeli mamy w przestrzeni eliptycznej trzy proste różne między sobą i nie przecinające się w jednym punkcie, to odcinki wyznaczone przez punkty przecięcia utworzą nie jeden, a cztery trójkąty, które pokryją całą przestrzeń Z.
Zastanówmy się nad prawdziwością następującego zdania: ,,Jeżeli p, r i s są trzema punktami prostej Z i r leży między p i s, to mamy $d(p, r) + d(r, s) = d(p, s)$". W rzeczywistości powyższe stwierdzenie jest pozbawione sensu, gdyż pozbawione sensu jest pojęcie ,,leżenia między" dla punktów prostej eliptycznej.
Każde dwie proste w przestrzeni eliptycznej Z mają dokładnie jeden punkt przecięcia. Stwierdzamy to rozważając łuki kół wielkich na połówce sfery. A więc prostych rozłącznych w naszej przestrzeni nie ma. Tym zasadniczo różni się przestrzeń eliptyczna Riemanna od euklidesowej, jak również od nieeuklidesowej płaszczyzny Bolyaia-Łobaczewskiego, w której przez zadany punkt poza prostą l przechodzi nieskończenie wiele prostych nie przecinających się z l.

Czy tylko dla biedronek?

Można by zadać pytanie, po co konstruować takie dziwaczne przestrzenie i rozważać ich własności. Czy tylko dlatego, że one istnieją jako logicznie konsekwentne twory myślowe? Podobnie rozsądne pytanie mógłby zadać w starożytnym Egipcie Ptolemeuszy mierniczy matematykowi aleksandryjskiemu. Mianowicie pytanie: po co zajmować się trygonometrią sferyczną, kiedy ,,zwykła" geometria wystarcza w zupełności do rozwiązywania wszystkich zadań związanych z wytyczaniem kanałów i miedz. O tym, że może istnieć coś takiego, jak mapa Oceanii lub Eurazji, mierniczy ten miał prawo nie mieć pojęcia. Eratostenes też nie wiedział o istnieniu Oceanu Spokojnego, ale ponieważ wyobraźnią i zakresem badań naukowych wybiegł poza geodezję obszaru nawadnianego przez Nil, zdołał obliczyć przybliżoną długość południka ziemskiego.

Tak, jak model powierzchni Ziemi można opisać w geometrii sferycznej, tak wyjaśnianie pewnych zjawisk fizycznych udaje się dopiero wtedy, kiedy wykorzystamy aparat geometrii różniczkowej przestrzeni nieeuklidesowych. Opracowanie takich metod zapoczątkował Bernard Riemann ok. r. 1854, a do postaci ,,użytkowej" doprowadził je Albert Einstein. Pewne wprowadzenie w poruszone wyżej zagadnienia znajdzie Czytelnik w książkach ,,Geometria poglądowa" D. Hilberta i S. Cohn-Vossena oraz we ,,Wstępie do geometrii dawnej i nowej" C. S. M. Coxetera.

Rozwiązanie zadania M 173
Zauważmy, że suma trzech liczb naturalnych jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy albo reszty z dzielenia tych liczb przez 3 są wszystkie różne, albo wszystkie równe.
Podzielmy zbiór $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ na klasy liczb dających przy dzieleniu przez 3 równe reszty:

$$\{3, 6, \ldots, 3n\},\ \{1, 4, \ldots, 3n-2\},\ \{2, 5, \ldots, 3n-1\}.$$

Trójka liczb, której suma jest podzielna przez 3, składa się więc bądź z liczb z różnych klas, bądź z liczb tej samej klasy. Trójek liczb złożonych z liczb z różnych klas jest oczywiście n^3, trójek zaś złożonych z liczb z jednej klasy jest $\left(\frac{n}{3}\right)$.
Tak więc szukanych trójek jest $n^3 + 3\binom{n}{3} = n^3 + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) = \frac{n}{2}(3n^2 - 3n + 2)$.