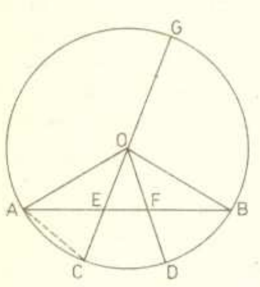
Jeszcze o przybliżonej trysekcji kąta

Autor jest studentem fizyki w Ravenshaw College w Kattak (Cuttack), Indie. Tytuł pochodzi od Redakcji, która też poczyniła znaczne skróty i pewne modyfikacje w nadesłanym maszynopisie.

W angielskim kręgu językowym konstrukcje platońskie nazywane są euklidesowymi.



Gourang Chandra MOHANTY

Słynny problem konstrukcyjnej trysekcji kąta wyzwalał wiele ludzkiej pomysłowości zarówno w starożytności jak i obecnie — mimo, iż udowodniono, że nie jest ona możliwa do przeprowadzenia. W związku z tym dysponujemy dużą ilością metod (przybliżonych lub nie-euklidesowych) rozwiązania tego problemu. W tym artykule omawiamy metodę przybliżoną opartą na geometrycznym rozwiązaniu równania trzeciego stopnia opisującego związek między cięciwą opartą na kącie środkowym, cięciwą opartą na jednej trzeciej tego kąta oraz promieniem okręgu.

1. Równanie

Rozważmy w kole o promieniu r kąt środkowy θ oparty na łuku AB. Niech c będzie długością cięciwy AB, a ξ długością cięciwy wyznaczonej przez kąt środkowy $\theta/3$. W pracy: G.C. Mohanty, *Approximate Euclidean Angle Trisection*, Math. Teacher (India) **11**(1975), wykazano, że

(1) $$\xi^3-3\xi r^2+cr^2 = 0$$

oraz że, dla wszystkich ostrych kątów θ, spełniona jest nierówność

(2) $$c/3 < \xi < 3c/8.$$

Tu podamy inne, prostsze wyprowadzenie tych związków.
Niech OC i OD będą promieniami dzielącymi kąt AOB na trzy części przecinającymi cięciwę AB odpowiednio w punktach E i F i niech G będzie drugim z punktów przecięcia prostej CO z okręgiem. Oczywiste jest, że

(3) $$c = 2r\sin\frac{\theta}{2}$$

oraz

(4) $$\xi = 2r\sin\frac{\theta}{6}.$$

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta OAE otrzymujemy

$$\frac{AE}{AO} = \frac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{6}\right)}.$$

Zatem

(5) $$AE = 2r\sin\frac{\theta}{6} = \xi = BF.$$

Ponadto z twierdzenia o cięciwach mamy

$$GE\cdot EC = AE\cdot EB,$$

czyli, jeśli przyjąć $OE = OF = \eta$,

$$(r+\eta)(r-\eta) = \xi(c-\xi),$$

skąd

(6) $$\eta^2 = r^2+\xi^2-\xi c.$$

Odcinek OE leży na dwusiecznej kąta AOF, więc $OA/OF = AE/EF$, czyli

(7) $$\frac{r}{\eta} = \frac{\xi}{c-2\xi}.$$

Ze związków (6) i (7) wnioskujemy, że

$$c\xi^3-4c\xi r^2+c^2r^2-\xi^4+3\xi^2r^2 = 0,$$

skąd $$(c-\xi)(\xi^3-3\xi r^2+cr^2) = 0.$$

Ponieważ zaś $c \neq \xi$, to drugi czynnik musi być równy zeru, co dowodzi związku (1). (Związek ten można też wyprowadzić bezpośrednio z równości (3) oraz (4). Z (3) i (4) wynika również, że

$$\frac{\xi}{c} = \frac{\sin\dfrac{\theta}{6}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+2\cos\dfrac{\theta}{3}}$$

co wobec nierówności $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ daje

$$\frac{1}{3} < \frac{\xi}{c} < \frac{1}{1+\sqrt{3}} < \frac{3}{8},$$

a więc nierówność (2). Gdybyśmy teraz potrafili geometrycznie — z zachowaniem zasad konstrukcji cyrklem i linijką — rozwiązać równanie (1), to problem trysekcji byłby rozwiązany. Zrobimy to następująco [chodzi oczywiście o rozwiązanie przybliżone — Red.]

2. Rozwiązywanie równania

Dla prostoty przyjmijmy, że $r = 1$. Równanie (1) sprowadza się teraz do

$$\xi^3 - 3\xi + c = 0. \tag{8}$$

Rozważmy na razie ogólniejsze równanie postaci

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{9}$$

tzw. *zredukowane równanie sześcienne*. Zauważmy przede wszystkim, że równaniem prostej normalnej (prostopadłej) do paraboli $y^2 = 4ax$ jest

$$y = mx - 2am - am^3, \tag{10}$$

gdzie m jest współczynnikiem kierunkowym tej prostej. Równanie to można przepisać w postaci

$$m^3 + \left(2 - \frac{x}{a}\right)m + \frac{y}{a} = 0. \tag{11}$$

Porównując równania (9) i (11) stwierdzimy, że będą one miały te same pierwiastki dla

$$x = a(2-p) \text{ i } y = qa.$$

Zatem, przy danych p i q, możemy dowolnie dobrać parametr a i znaleźć wykres odpowiedniej paraboli. Przy tym współczynniki kierunkowe prostych normalnych do tej paraboli przechodzących przez punkt (x, y) są pierwiastkami równania (9). Będą one zależały od położenia punktu (x, y) względem tej paraboli.
Powróćmy teraz do naszego równania przyjmując $a = 1$, $x = 5$ i $y = c$. Przez punkt $(5, c)$ możemy poprowadzić proste o współczynnikach kierunkowych $m_1 = \xi_1 \overset{\mathrm{df}}{=} c/3$ i $m_2 = \xi_2 \overset{\mathrm{df}}{=} 3c/8$, a więc odpowiednio o równaniach

$$y = \frac{c}{3}x - \frac{2c}{3} \tag{12}$$

i

$$y = \frac{3c}{8}x - \frac{7c}{8}. \tag{13}$$

Odcinek paraboli $y^2 = 4x$ odcięty tymi prostymi w ćwiartce $(+, -)$ (rozważamy tylko tę ćwiartkę, ponieważ poszukujemy dodatniego pierwiastka) można przybliżyć odcinkiem prostej. Rzędnymi punktów przecięcia prostych (12) i (13) z parabolą w tej ćwiartce są odpowiednio

$$y_1 = \frac{1}{c}\left(6 - 2\sqrt{9+2c^2}\right) \tag{14}$$

oraz

$$y_2 = \frac{1}{3c}\left(16 - 2\sqrt{64+21c^2}\right). \tag{15}$$

Punkty K i L o takich rzędnych na prostych (12) i (13) można wyznaczyć za pomocą cyrkla i linijki. Po połączeniu ich odcinkiem KL można poprowadzić prostopadłą do tego odcinka przez punkt $(5, c)$. Współczynnik kierunkowy tej prostopadłej będzie pierwszym przybliżeniem rozwiązania równania (8), a to już oznacza, że jesteśmy w stanie dokonać przybliżonej trysekcji kąta. (Gdyby wolno nam było rysować parabolę, to bylibyśmy w stanie przeprowadzić trysekcję dokładną).

3. Jeszcze o rozwiązaniu

Interesujący nas współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do odcinka KL — przybliżona wartość pierwiastka — jest liczbą przeciwną do odwrotności współczynnika kierunkowego prostej KL.

Rozwiązanie zadania M 172

Niech A, B, C będą trzema niewspółliniowymi punktami powierzchni $\mathscr{S}$ i niech D będzie punktem powierzchni $\mathscr{S}$ nie należącym do okręgu K wyznaczonego przez A, B, C. Niech T będzie sferą lub płaszczyzną wyznaczoną przez punkty A, B, C, D. Jeżeli M jest dowolnym punktem powierzchni T, to przez M i D przechodzi okrąg K_1 zawarty w T i przecinający okrąg K w dwóch punktach. Okrąg K_1 ma z powierzchnią $\mathscr{S}$ trzy punkty wspólne, a mianowicie D i dwa punkty przecięcia z K, zatem $K_1 \subset \mathscr{S}$, $M \in \mathscr{S}$ $T \subset \mathscr{S}$. Przypuśćmy teraz, że istnieje punkt E należący do $\mathscr{S} \setminus T$. Przez punkt E i dowolny punkt przestrzeni F przechodzi okrąg mający z T dwa punkty wspólne. Okrąg ten ma z powierzchnią $\mathscr{S}$ trzy punkty wspólne (E i punkty przecięcia okręgu z T), cały więc jest zawarty w $\mathscr{S}$, zatem $F \in \mathscr{S}$, czyli dowolny punkt przestrzeni należałby do $\mathscr{S}$, co jest niemożliwe. Założenie istnienia punktu E doprowadziło więc do sprzeczności, zatem $\mathscr{S} = T$.

Rozwiązanie zadania M 174

Pochodna $f'(x)$ ma oczywiście wszystkie pierwiastki rzeczywiste i różne. Niech będą to liczby $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą pierwiastkami wielomianu $f(x) - a$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — pierwiastkami wielomianu $f(x) - b$. Jest oczywiście
$x_1 < z_1 < x_2 < z_2 < \ldots < x_{n-1} < z_{n-1} < x_n$
i $y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \ldots < y_{n-1} < z_{n-1} < y_n$.
Przedziały o końcach x_i, y_i nie mają punktów wspólnych, gdyż zawarte są one w rozłącznych przedziałach $(-\infty, z_1)$, (z_1, z_2), ..., $(z_{n-1}, +\infty)$. Wielomian $f(x)$ przyjmuje w punktach x_i, y_i wartości a i b, zatem wewnątrz przedziału o tych końcach przyjmuje wartość c. Tak więc wielomian $f(x) - c$ przyjmuje wartość 0 dla n różnych liczb rzeczywistych.

Niech x_1 i x_2 będą odpowiednio odciętymi punktów K i L. Ponieważ punkty te leżą na paraboli $y^2 = 4x$, więc oczywiście

$$x_1 = \frac{y_1^2}{4} \text{ i } x_2 = \frac{y_2^2}{4},$$

skąd wnioskujemy, że współczynnikiem kierunkowym prostej KL jest

$$M = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2},$$

wobec czego nasze przybliżenie pierwszego rzędu pierwiastka ξ określone jest wzorem

$$\xi_{01} = -\frac{1}{M} = -\frac{1}{4}(y_1 + y_2).$$

Podstawiając tu wartości y_1 i y_2 z (14) i (15) otrzymamy

$$\xi_{01} = \frac{1}{k_{01}} \cdot c,$$

gdzie

$$k_{01} = \frac{3\sqrt{9+2c^2} + \sqrt{64+21c^2} - 17}{6c^2}. \tag{16}$$

(Indeks 0 oznacza pierwiastek, indeks 1 — informuje o tym, że jest to przybliżenie pierwszego rzędu.) Z wzoru (16) wynika, że przybliżenie to rzeczywiście daje się skonstruować przy pomocy cyrkla i linijki.

Możemy również rozważać przybliżenia drugiego rzędu. Aby je otrzymać należy sprawdzić, czy ξ_{01} jest bliższe ξ_1, czy ξ_2. (Dla małych kątów będzie bliższe ξ_1, dla dużych — ξ_2. Jeśli wartość ξ_{01} leży mniej więcej pośrodku, to jest ona bliska ξ_0 i nie ma potrzeby wykonywania kolejnego kroku.) Praktycznym sposobem ustalenia tego jest sprawdzenie, czy rozważana prostopadła tworzy mniejszy kąt z prostą o współczynniku kierunkowym $m_1 = \xi_1$ czy $m_2 = \xi_2$.

Jeśli ξ_{01} jest bliższe ξ_1 niż ξ_2, to ponawiamy konstrukcję opisaną powyżej prowadząc przez punkt $(5, c)$ proste o współczynnikach kierunkowych $m_1 = \xi_1$ i $m_{01} = \xi_{01}$, otrzymując drugie przybliżenie ξ_{02}. (Analogicznie postępujemy w przypadku, gdy ξ_{01} jest bliższe ξ_2.) Postępowanie to można oczywiście iterować. W ogólnym przypadku odpowiednikiem wzoru (16) będzie

$$k_{0n} = \frac{2c^2}{\sqrt{k_{1,n-1}^2 + (5-k_{1,n-1})c^2} + \sqrt{k_{2,n-1}^2(5-k_{2,n-1})c^2} - (k_1+k_2)} \tag{17}$$

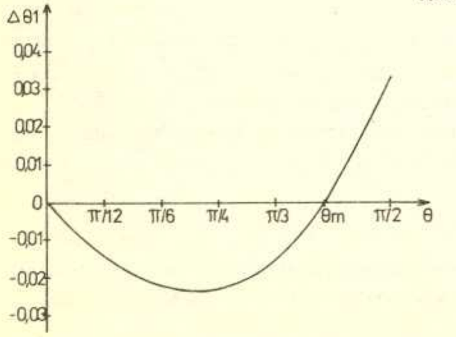
gdzie $k_{1,n} = \dfrac{1}{\xi_{1,n} \cdot c}$, $\quad k_{2,n} = \dfrac{1}{\xi_{2,n} \cdot c}$

a $\xi_{1,n}$ i $\xi_{2,n}$ są współczynnikami kątowymi prostych, od których rozpoczyna się konstrukcja (dla $k_{1,n-1} = 3$ i $k_{2,n-1} = \dfrac{8}{3}$ równanie (17) sprowadza się do (16)). Można pokazać, że przy dostatecznie dużej liczbie iteracji błąd rozwiązania będzie mniejszy od dowolnie małej liczby dodatniej. Okazuje się jednak (jak zobaczymy), że dla celów praktycznych wystarcza już drugie lub trzecie przybliżenie.

4. Oszacowania błędów

Autor szacuje błędy w sposób przybliżony. Z rozważań jego nie wynika, jak dokładne są oszacowania tych błędów („błędy błędów"!). W związku z tym cytujemy jedynie niektóre z jego wyników bez uzasadniających je rozważań.

Przybliżone obliczenia pokazują, że dla pierwszego przybliżenia błędy są ujemne w przedziale $(0, \theta_m)$ i dodatnie w przedziale $\left(\theta_m, \frac{\pi}{2}\right)$. Konstrukcja jest dokładna już w pierwszym kroku dla pewnego kąta $\theta_m \approx 1.20220507355 \times \frac{\pi}{3}$, a maksimum błędu jest osiągane dla $\theta = \frac{\pi}{2}$ (zob. rysunek).



Błędy kolejnych przybliżeń dla $\theta = \frac{\pi}{2}$ są w przybliżeniu następujące:

n	$\Delta_n\xi$	$\Delta_n\theta$
1	0.033000777	0.034088729
2	0.019873889	0.020547095
3	0.007111107	0.007358350
4	—	−0.005231552
5	—	0.002047171
6	—	−0.002947263
7	—	−0.000829884

Jak więc widać, już przybliżenia trzeciego rzędu są wystarczająco dobre