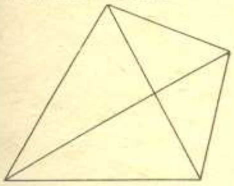
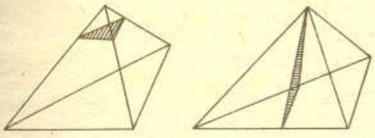
# Wielościany z minimalną ilością powtórzeń (II)

W pierwszej części artykułu Autorka wykazała, że dla każdego wypukłego wielościanu różnica między ilością ścian w ogóle, a ilością rodzajów ścian (trójkąty, czworokąty itd.) jest nie mniejsza od 3. Różnica ta została nazwana *ilością powtórzeń*. Termin: *wielościan z k-kątem* oznacza wielościan z minimalną ilością powtórzeń, w którym ścianą o największej liczbie boków jest $k$-kąt. Autorka dowiodła szeregu *własności* wielościanów, z których będzie korzystać w tej części artykułu.



Rys. 1



a) b)

Rys. 2

*Małgorzata ZALEWSKA*

W pierwszej części artykułu (Delta 7/1978) określiliśmy, dla jakich $k$ mogą istnieć wielościany z $k$-kątem. Spróbujemy teraz je zbudować.

**1°** Dla $k = 3$ istnieje tylko jeden wielościan z trzema powtórzeniami — jest nim czworościan.

(*) Jest to jednocześnie jedyny wielościan z czterema $k$-kątami. Dowód:
Weźmy dwa $k$-kąty $A_1A_2 \dots A_k$ i $A_1A_2B_3 \dots B_k$. Ściana zawierająca krawędzie $A_2A_3$ i $A_2B_3$ jest trójkątem, podobnie jak ściana zawierająca krawędzie $A_kA_1$ i $B_kA_1$ (por. własność 4 w cz. I). W takim razie wielościan zawiera co najmniej dwa trójkąty. Gdyby było $k > 4$, to mielibyśmy jeszcze 4 $k$-kąty, co dałoby liczbę powtórzeń większą niż 3.

**2°** Przyjmijmy $k = 4$. Wiemy, że nie istnieje wielościan z 4 czworokątami. Istnieje natomiast wielościan z trzema czworokątami — jest nim graniastosłup o podstawie trójkątnej.

(**) Jest to jedyny wielościan, zawierający dokładnie trzy $k$-kąty (dowód podobny jak w punkcie **1°**).

Nie istnieje wielościan zawierający dokładnie dwa czworokąty (jeżeli wielościan ma dwa czworokąty, to musi mieć także trzeci). Istnieje wielościan zawierający dokładnie jeden czworokąt — jest nim ostrosłup o podstawie czworokątnej.

Oba wielościany z czworokątem — ostrosłup i graniastosłup — można otrzymać przez obcięcie czworościanu, tak jak jest to pokazane na rys. 2.

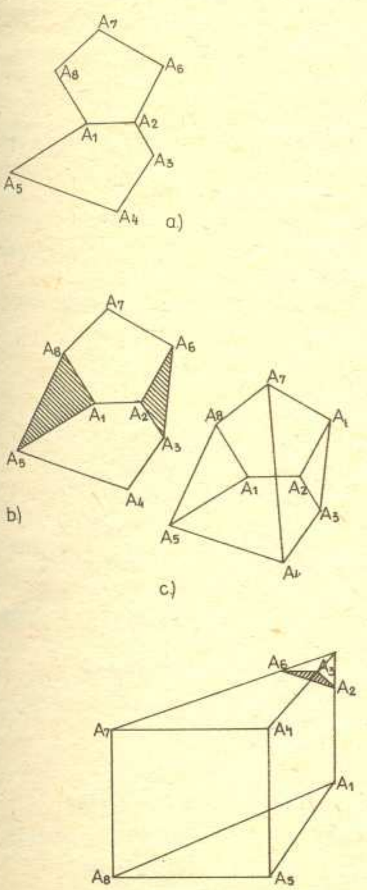
Omówiliśmy wszystkie wielościany z czworokątem.

**3°** Niech $k = 5$. Z własności (*) i (**) wynika, że nie istnieje wielościan zawierający trzy lub cztery pięciokąty. Istnieje natomiast wielościan z dwoma pięciokątami. Zbudujemy go. Weźmy dwa pięciokąty $A_1A_2A_3A_4A_5$ i $A_1A_2A_6A_7A_8$ (rys. 3a). Aby wielościan miał własność **4**, ściany zawierające krawędzie $A_1A_5$ i $A_1A_8$ oraz $A_2A_3$ i $A_2A_6$ muszą być trójkątami — „wstawiamy" trójkąty $A_1A_5A_8$ i $A_2A_3A_6$ (rys. 3b). Możemy teraz wstawić dwie ściany. Jedna z nich zawiera krawędzie $A_3A_4$ i $A_6A_7$, a druga $A_4A_5$ i $A_7A_8$ (własność **2**) — ściany te muszą przecinać się wzdłuż krawędzi $A_4A_7$ — są więc czworokątami $A_3A_4A_6A_7$ i $A_4A_5A_7A_8$. Po „wstawieniu" tych ścian otrzymujemy wielościan zbudowany z dwóch trójkątów, dwóch czworokątów i dwóch pięciokątów (rys. 3c). Wielościan taki można otrzymać przez obcięcie wielościanu z trzema czworokątami (rys. 3d).

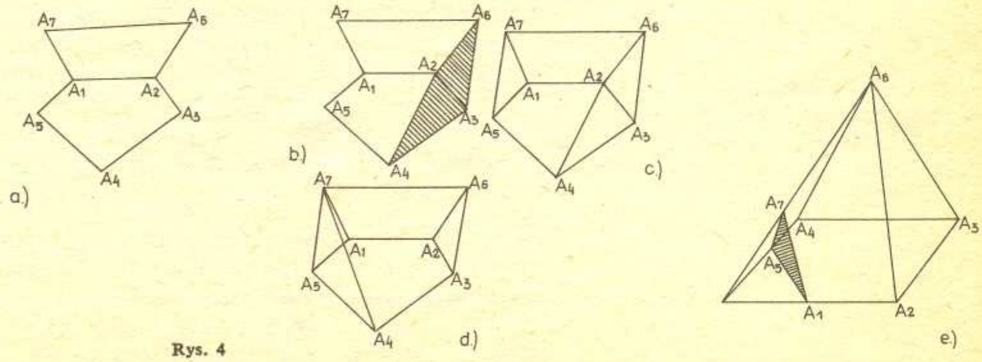
Zbudowaliśmy wielościan z dwoma pięciokątami. Ze sposobu konstrukcji tego wielościanu wynika, że nie istnieją inne wielościany z dwoma pięciokątami. Z twierdzenia I wynika natomiast, że może istnieć wielościan zawierający dokładnie jeden pięciokąt. Pokażemy go. Weźmy pięciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5$. Wielościan z pięciokątem musi mieć czworokąt (własność **1**), więc dostawiamy czworokąt $A_1A_2A_6A_7$. Wielościan ma własność **5** — ściana zawierająca krawędzie $A_1A_5$ i $A_1A_7$ lub $A_2A_6$ i $A_2A_3$ jest trójkątem. Przyjmijmy, że jest to ściana zawierająca krawędzie $A_2A_3$ i $A_2A_6$ (rys. 4a). (Okaże się, że założenie to nie jest istotne).

Aby wielościan miał własność **6**, ściana zawierająca krawędź $A_4A_5$ lub $A_3A_4$ musi być trójkątem. Rozważmy najpierw przypadek, gdy ściana zawierająca krawędź $A_3A_4$ jest trójkątem $A_3A_4A_6$ (rys. 4b). Pozostałe ściany mają krawędzie wspólne z pięciokątem $A_1A_2A_3A_4A_5$ i czworokątem $A_1A_2A_6A_7$ (własność **2** i **3**) — otrzymujemy wielościan przedstawiony na rys. 4c, zbudowany z pięciokąta, dwóch czworokątów i trzech trójkątów.

Jeżeli założymy, że ściana zawierająca krawędź $A_4A_5$ jest trójkątem $A_4A_5A_7$ (rys. 4d), otrzymamy wielościan nie różniący się od poprzedniego. Wielościan taki można otrzymać przez „obcięcie" ostrosłupa o podstawie czworokątnej (rys. 4e). Z własności **10** wynika, że nie istnieje wielościan mający $2k-2 = 8$ wierzchołków, zawierający dokładnie jeden pięciokąt. Omówiliśmy więc wszystkie wielościany z pięciokątami.

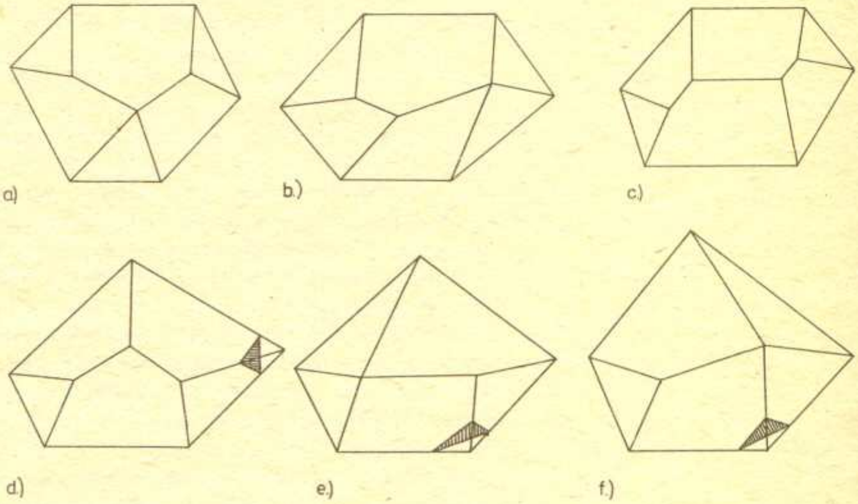



Rys. 3

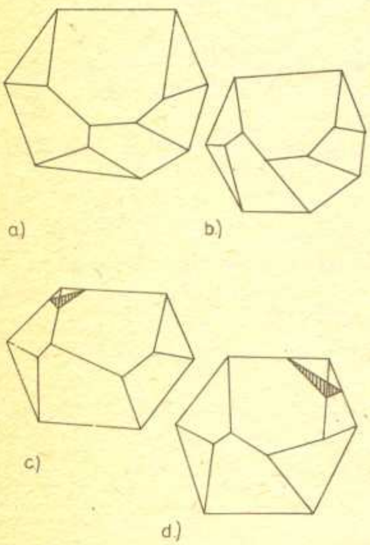



Rys. 4

4° Niech $k = 6$. Z własności **10**, **11**, (*), (**) wynika, że wielościan z sześciokątem może zawierać tylko jeden sześciokąt, przy czym wielościan ten może mieć $2k-3 = 9$ lub $2k-2 = 10$ wierzchołków. Jeżeli założymy, że wielościan z sześciokątem ma 9 wierzchołków, to otrzymujemy wielościany przedstawione na rysunkach 5a i 5b — są one różne. Jedyny wielościan mający 10 wierzchołków przedstawiony jest na rysunku 5c. Wszystkie te wielościany można otrzymać przez „obcięcie" wielościanu z dwoma pięciokątami (rys. 5d, e, f).



Rys. 5



Rys. 6

5° Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy $k = 7$. Z własności **10**, **11**, (*), (**) wynika, że wielościan z siedmiokątem ma $2k-2 = 12$ wierzchołków. Po przeprowadzeniu konstrukcji analogicznych jak w punkcie 3° otrzymujemy dwa różne wielościany, przedstawione na rysunkach 16a i 16b. Wielościany te także można otrzymać przez „obcięcie" wielościanów z sześciokątem (rys. 16c i 16d).

Omówiliśmy wszystkie wielościany z 3, ..., 7-kątem. Z własności **10**, **11**, (*), (**) wynika, że nie istnieją inne wielościany z trzema powtórzeniami. Znaleźliśmy 10 klas wielościanów. Zauważmy jeszcze, że każdy wielościan z $k$-kątem można otrzymać przez „obcięcie" pewnego wielościanu z $(k-1)$-kątem, a więc każdy wielościan z trzema powtórzeniami można otrzymać przez „obcinanie" czworościanu, otrzymując po drodze wyłącznie wielościany z trzema powtórzeniami.

# O liczbach $p$-adycznych

*Mgr Krystyna WOJTKÓW*

Zanim będziemy mogli powiedzieć, czym są „liczby $p$-adyczne", przypomnimy pewne podstawowe wiadomości o „zwykłych" liczbach. Już w pierwszych klasach szkoły podstawowej uczą nas rachunków na liczbach naturalnych 1, 2, 3, ... (obecnie nawet 0, 1, 2, 3, ...). Po dodawaniu przychodzi kolej na odejmowanie. Dowiadujemy się, że $m-n$ to taka liczba, która dodana do $n$ daje $m$. Wyrażamy to (nie w szkole podstawowej, rzecz jasna) wzorem

(1) $$m-n = k \Leftrightarrow m = k+n.$$

Wzór (1) możemy traktować jako definicję symbolu „$-$" znaku odejmowania albo jak kto woli, definicję operacji odejmowania. W pierwszych klasach szkoły podstawowej uczą nas, że wzór ten ma sens tylko gdy $m \geqslant n$. Nic dziwnego: w zakresie liczb naturalnych nie ma takiego $k$, że $m < n$ i $m = k+n$. Przychodzi jednak wreszcie dzień, w którym pani nauczycielka mówi: cieszcie się, dzieci, bo od dziś będziecie mogli odejmować większe od mniejszego. Ograniczenie $m \geqslant n$ we wzorze (1) przestaje obowiązywać. Nie wzbudza to żadnego protestu z naszej strony, ponieważ z liczbami ujemnymi stykamy się w życiu codziennym dość często (szczególnie w zimie!) i nawet nie przychodzi nam do głowy, że ktoś mógł kiedyś poważnie sądzić, że nie może być nic mniejszego od zera.

Bardzo podobnie jest z ułamkami. Uczymy się, że „podzielić liczbę $a$ przez $b$" znaczy „znaleźć $c$ takie, że $a = bc$". Dopóki „liczba" znaczy dla nas „liczba całkowita", nie zawsze możemy taką liczbę $c$ znaleźć. Gdy zaś chcemy, by wzór

(2) $$a:b = c \Leftrightarrow a = bc$$

był prawdziwy zawsze (gdy $b \neq 0$), musimy wprowadzić ułamki. Mówimy po prostu, że wzór (2) obowiązuje dla wszelkich liczb (byle nie dzielić przez 0). Tu także nikt nie protestuje przeciwko takiemu rozszerzeniu zakresu stosowalności wzoru definiującego iloraz, a co za tym idzie, przeciwko nieco beztroskiemu rozszerzeniu pojęcia liczby (filozof powiedziałby: dołączamy nowe desygnaty) i teraz „liczba" znaczy dla nas naprawdę „liczba wymierna".