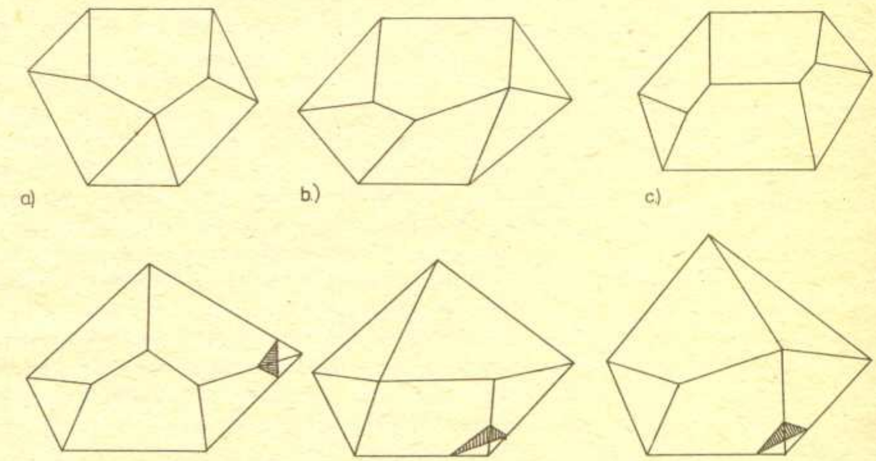
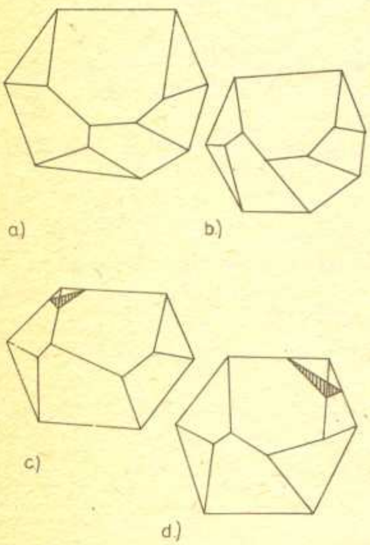
4° Niech $k = 6$. Z własności **10**, **11**, (*), (**) wynika, że wielościan z sześciokątem może zawierać tylko jeden sześciokąt, przy czym wielościan ten może mieć $2k-3 = 9$ lub $2k-2 = 10$ wierzchołków. Jeżeli założymy, że wielościan z sześciokątem ma 9 wierzchołków, to otrzymujemy wielościany przedstawione na rysunkach 5a i 5b — są one różne. Jedyny wielościan mający 10 wierzchołków przedstawiony jest na rysunku 5c. Wszystkie te wielościany można otrzymać przez „obcięcie" wielościanu z dwoma pięciokątami (rys. 5d, e, f).



Rys. 5 a) b) c) d) e) f)



a) b) c) d) Rys. 6

5° Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy $k = 7$. Z własności **10**, **11**, (*), (**) wynika, że wielościan z siedmiokątem ma $2k-2 = 12$ wierzchołków. Po przeprowadzeniu konstrukcji analogicznych jak w punkcie 3° otrzymujemy dwa różne wielościany, przedstawione na rysunkach 16a i 16b. Wielościany te także można otrzymać przez „obcięcie" wielościanów z sześciokątem (rys. 16c i 16d).

Omówiliśmy wszystkie wielościany z 3, ..., 7-kątem. Z własności **10**, **11**, (*), (**) wynika, że nie istnieją inne wielościany z trzema powtórzeniami. Znaleźliśmy 10 klas wielościanów. Zauważmy jeszcze, że każdy wielościan z k-kątem można otrzymać przez „obcięcie" pewnego wielościanu z $(k-1)$-kątem, a więc każdy wielościan z trzema powtórzeniami można otrzymać przez „obcinanie" czworościanu, otrzymując po drodze wyłącznie wielościany z trzema powtórzeniami.

O liczbach p-adycznych

Mgr Krystyna WOJTKÓW

Zanim będziemy mogli powiedzieć, czym są „liczby p-adyczne", przypomnimy pewne podstawowe wiadomości o „zwykłych" liczbach. Już w pierwszych klasach szkoły podstawowej uczą nas rachunków na liczbach naturalnych 1, 2, 3, ... (obecnie nawet 0, 1, 2, 3, ...). Po dodawaniu przychodzi kolej na odejmowanie. Dowiadujemy się, że $m-n$ to taka liczba, która dodana do n daje m. Wyrażamy to (nie w szkole podstawowej, rzecz jasna) wzorem

(1) $$m-n = k \Leftrightarrow m = k+n.$$

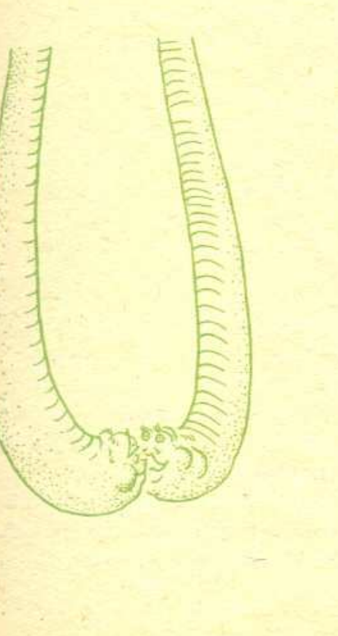
Wzór (1) możemy traktować jako definicję symbolu „$-$" znaku odejmowania albo jak kto woli, definicję operacji odejmowania. W pierwszych klasach szkoły podstawowej uczą nas, że wzór ten ma sens tylko gdy $m \geqslant n$. Nic dziwnego: w zakresie liczb naturalnych nie ma takiego k, że $m < n$ i $m = k+n$. Przychodzi jednak wreszcie dzień, w którym pani nauczycielka mówi: cieszcie się, dzieci, bo od dziś będziecie mogli odejmować większe od mniejszego. Ograniczenie $m \geqslant n$ we wzorze (1) przestaje obowiązywać. Nie wzbudza to żadnego protestu z naszej strony, ponieważ z liczbami ujemnymi stykamy się w życiu codziennym dość często (szczególnie w zimie!) i nawet nie przychodzi nam do głowy, że ktoś mógł kiedyś poważnie sądzić, że nie może być nic mniejszego od zera.

Bardzo podobnie jest z ułamkami. Uczymy się, że „podzielić liczbę a przez b" znaczy „znaleźć c takie, że $a = bc$". Dopóki „liczba" znaczy dla nas „liczba całkowita", nie zawsze możemy taką liczbę c znaleźć. Gdy zaś chcemy, by wzór

(2) $$a:b = c \Leftrightarrow a = bc$$

był prawdziwy zawsze (gdy $b \neq 0$), musimy wprowadzić ułamki. Mówimy po prostu, że wzór (2) obowiązuje dla wszelkich liczb (byle nie dzielić przez 0). Tu także nikt nie protestuje przeciwko takiemu rozszerzeniu zakresu stosowalności wzoru definiującego iloraz, a co za tym idzie, przeciwko nieco beztroskiemu rozszerzeniu pojęcia liczby (filozof powiedziałby: dołączamy nowe desygnaty) i teraz „liczba" znaczy dla nas naprawdę „liczba wymierna".

Rozwiązanie zadania M 170
Zauważmy, że potęgi liczb 14, 19 i 29 dają przy dzieleniu przez 5 reszty 1 i 4. Gdyby więc dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych była spełniona równość $14^x+19^y=29^z$, to reszty, które otrzymalibyśmy przy dzieleniu przez 5 każdej strony tej równości, byłyby równe. Jednakże liczba 14^x+19^y może dać reszty 2, 0, 3, a prawa — 1 i 4. Reszty z dzielenia każdej strony równości przez 5 nie są nigdy równe, zatem nie istnieją liczby całkowite nieujemne spełniające dane równanie. Znając podstawowe własności kongruencji można to rozumowanie zapisać krócej: Ponieważ $14 \equiv -1 \pmod 5$, $19 \equiv -1 \pmod 5$ i $28 \equiv -1 \pmod 5$, byłoby $(-1)^x+(-1)^y \equiv (-1)^z \pmod 5$, czyli 0, 2 lub -2 przystawałoby do ± 1 modulo 5, co jest niemożliwe.



Niezrozumiałe opory wywołuje dopiero przedłużanie ważności wzoru

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \tag{3}$$

z nieujemnych na wszystkie a. Wytaczamy tu argumenty, że „przecież nie ma takiej liczby x, że $x^2 = -1$, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej różnej od zera jest dodatni", zapominając o tym, jak drwiąco potraktowaliśmy rozumowanie „nie ma takiej liczby, która dodana do 2 daje 1, jako, że dodać znaczy powiększyć".
Nazwa „liczba rzeczywista" jest tak sugestywna, że nasz umysł wzbrania się przed uznaniem za „prawdziwe" również i innych liczb. A liczby zespolone (które powstają w wyniku stosowania wzoru (3) dla wszystkich a) są, na dobrą sprawę, punktami płaszczyzny, co do których nie mamy wątpliwości, że istnieją „naprawdę". Dlaczegóż punkty linii prostej mamy prawo uznać za liczby, a płaszczyzny nie?
Z tej przydługiej historii wyłania się taki morał: „nowe" liczby bardzo często powstają w wyniku bezceremonialnego obalania barier stosowalności pewnych reguł czy wzorów.
Czytelnik zauważył zapewne, że nie opisaliśmy, jakie bariery obalamy przy przechodzeniu od liczb wymiernych do rzeczywistych (które obejmują liczby wymierne i niewymierne). Starożytni Grecy mówili: nie ma takiej liczby x, że $x^2 = 2$, bo gdyby była i wynosiła p/q, to ... (tu następuje sprytne sprowadzenie do niedorzeczności). Umówmy się, że aż do odwołania liczbami nazywamy ułamki $\frac{p}{q}$ (p, q — całkowite) i tylko one. Ciąg liczb

$$1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142 \quad \ldots \tag{4}$$

nie jest zbieżny (Czytelnik domyśla się zapewne, jaki ciąg mamy na myśli), choć jego wyrazy są coraz bliższe siebie, zagęszczają się wokół czegoś, co gdyby było liczbą, dawałoby w kwadracie 2. Gdyby zbiór liczb (przypominamy o naszej umowie!) nie był „dziurawy", nasz ciąg miałby granicę i oznaczylibyśmy ją przez $\sqrt{2}$. Ale $\sqrt{2}$ nie jest liczbą (umowa jeszcze stoi!), tylko Bliżej Nieokreślonym Tworem Naszego Umysłu. Pora zatem przezwyciężyć gnuśność, wydać walkę wstecznictwu i uznać $\sqrt{2}$ za liczbę. Zrywamy z umową.
Dekret nr 1. Na życzenie szerokich mas matematyków ustanawia się granicę dla ciągu (4).
Dekret nr 2. W celu ułatwienia życia obywatelom oraz dla łatwiejszego wprowadzenia pojęć analizy matematycznej, tak niezbędnej w dzisiejszym świecie, ustanawia się, co następuje
a) każdy zagęszczający się ciąg liczb wymiernych ma granicę. W rozumieniu niniejszego dekretu „zagęszczającym się" jest każdy ciąg liczb wymiernych spełniający warunek Cauchy'ego;
b) ciąg a_n ma tę samą granicę, co b_n wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \ldots$ też jest ciągiem zagęszczającym się;
c) nie zabiera się granic ciągom, które były zbieżne przed wejściem w życie niniejszego dekretu;
d) granica ciągu (4) będzie oznaczana przez 1,41421356... i podobnie będzie się oznaczać inne granice wprowadzone przez niniejszy dekret.
Dekret nr 2 można nazwać Dekretem o Wprowadzeniu Liczb Niewymiernych. Widzimy, że liczby niewymierne p o w s t a j ą w wyniku uznania za zbieżne ciągów, które nie są, a „powinny być" zbieżne.
Przypatrzmy się bliżej pojęciu „zagęszczającego się" ciągu liczb wymiernych — czyli ciągu spełniającego warunek Cauchy'ego. Liczby 6,74682005149 i 6,74682005973 są dość bliskie siebie, gdyż ich kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego dość długo się pokrywają, albo inaczej: ich różnica 0,00000000824 ma na początku dość dużo zer. Jeżeli dla liczb x i y przez $N(x, y)$ oznaczymy liczbę zer na początku w różnicy $x-y$ (zera przed przecinkiem nie liczymy), to widzimy natychmiast, że $N(x, y)$ ma ścisły związek z odległością $d(x, y)$ liczb x i y na osi liczbowej:

$$10^{-N(x,y)-1} \leqslant d(x, y) \leqslant 10^{-N(x,y)}. \tag{5}$$

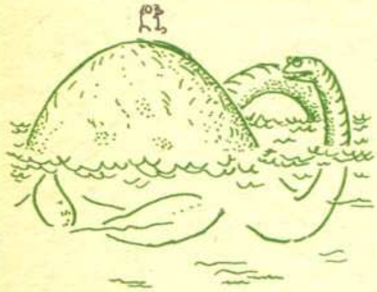
Prawa nierówność jest prawdziwa tylko dla liczb, których różnica ma 0 przed przecinkiem tj. liczby nie różnią się więcej niż o 1. Gdybyśmy odległości między liczbami mierzyli wzorem

$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} 10^{-N(x,y)} & \text{gdy } x-y \text{ zaczyna się na } 0,\ldots \\ 1 & \text{gdy różnica } x-y \text{ jest większa lub równa } 1, \end{cases} \tag{6}$$

to prawie wszystkie odległości zostałyby zmienione, ale zachowałaby się bardzo istotna z naszego punktu widzenia własność: blisko położone liczby nie „rozjechałyby się" w zupełnie różne strony. Ujmując to precyzyjniej: ciągi spełniające warunek Cauchy'ego względem odległości wyrażonej wzorem $d(x, y) = |x-y|$ spełniałyby warunek Cauchy'ego i względem nowej odległości:

$$\bigwedge_{0<\varepsilon} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{m>n_0} \bigwedge_{k>n_0} \bar{d}(a_m, a_k) < \varepsilon$$

Wynika z tego, że liczby niewymierne, wprowadzone przez sformułowany powyżej Dekret nr 2, pokrywają się z tymi określonymi przez Dekret nr 2', gdzie Dekret nr 2' ma to samo brzmienie, co Dekret 2, tyle że ciąg zagęszczający się jest rozumiany w sensie odległości (6).



Opisana procedura da się zastosować do dowolnych przestrzeni metrycznych i nosi nazwę „uzupełniania", ponieważ przestrzenią zupełną nazywamy taką przestrzeń metryczną, w której każdy zagęszczający się ciąg jest zbieżny.

Jesteśmy już blisko liczb 10-adycznych. W arytmetyce interesujemy się często teorią podzielności. Dwie liczby całkowite m i n nazwiemy „bliskimi z punktu widzenia podzielności przez potęgi 10" (krócej: bliskimi względem odległości 10-adycznej), jeżeli ich różnica ma na końcu dużo zer. Dokładnie: odległość 10-adyczna liczb całkowitych m i n, to liczba $d_{10}(m, n) = 10^{-N(m,n)}$, gdzie $N(m, n)$ oznacza liczbę zer na końcu różnicy $m-n$ (jeśli nie ma zer na końcu, to oczywiście $N(m, n) = 0$), Przykładowo:

$d_{10}(956455, 1486455) = 10^{-4} = 0{,}0001$, $d_{10}(25, 85640025) = 0{,}01$,

$d_{10}(2630098716543, 2630098716544) = 10^0 = 1$,

$d_{10}(1, 2) = d_{10}(1, 3) = \ldots = d_{10}(1, 10) = 10^0 = 1$, $d_{10}(1, 11) = 0{,}1$.

Czytelnik, który zajrzy na trzecią stronę okładki Delty nr 7/77, zrozumie lepiej, dlaczego przy konstrukcji liczb niewymiernych patrzyliśmy na zera na przedzie, a teraz na zera na końcu.

Rozpatrzmy teraz ciąg liczb całkowitych

(7) 5, 25, 625, 90625, 890625, 2890625, 12890625, ...

Nie wyjaśnimy na razie, jaka reguła rządzi budową kolejnych jego wyrazów, prócz tego, że występujące w nim liczby mają coraz dłuższe wspólne końcówki. Odległości 10-adyczne są coraz mniejsze. Ciąg (7) spełnia warunki Cauchy'ego. Oczywiście żadna liczba całkowita ani rzeczywista nie może być jego granicą. Ciąg (7) nie jest zbieżny do żadnej liczby rzeczywistej. Pora na wydanie mądrych ustaw.

Dekret nr 3. Na życzenie szerokich rzesz matematyków ustanawia się granicę względem odległości d_{10} dla ciągu 7.

Dekret nr 4. W celu ułatwienia życia obywatelom zajmującym się amatorsko lub zawodowo teorią liczb, teorią podzielności i teorią form kwadratowych ustanawia się, co następuje:

a) każdy zagęszczający się ciąg (w sensie odległości d_{10}) liczb całkowitych ma granicę;

b) ciąg a_n ma tę samą granicę co b_n wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \ldots\ldots$ też jest ciągiem zagęszczającym się;

c) nie zabiera się granic ciągom, które były już zbieżne uprzednio (choć takie były tylko ciągi od pewnego miejsca stałe),

d) sposoby oznaczania nowych granic wyjaśnia przykład: granicę ciągu (7) oznaczymy .....12890625.

Jest to Dekret o Wprowadzeniu Liczb 10-Adycznych. Uzupełniać go winien Dekret o Działaniach Arytmetycznych Na Liczbach 10-Adycznych, którego tu w całości przytaczać nie będziemy, a tylko pokażemy na przykładzie jak się takie liczby dodaje i mnoży. Widzimy, że działania te odbywają się według normalnych reguł, z tym tylko, że nasze liczby mogą mieć na początku nieskończoną ilość cyfr (znane Czytelnikom liczby rzeczywiste mogą mieć na końcu nieskończoną ilość cyfr).

Znajdziemy kwadrat liczby $a = \ldots 212890625$, danej jako granica ciągu (7) — precyzując jednocześnie, jak powstają jego kolejne wyrazy. Mamy (rachunek na marginesie, opuszczaliśmy miejsca nie mające wpływu na dziesięciocyfrową końcówkę) $a^2 = \ldots 8212890625$. Wynik powyższego mnożenia można interpretować tak: kwadrat liczby całkowitej, kończącej się na 212890625 też kończy się na 212890625. Można wykazać, że proces poszukiwania kolejnych, coraz dłuższych, końcówek o podobnej własności da się kontynuować „do nieskończoności". Istnieją dowolnie długie końcówki mające tę własność. Dla Czytelnika, który chciałby odnaleźć sposób ich poszukiwania, mamy wskazówkę: następną cyfrą będzie 8. Teraz możemy już dokładnie powiedzieć, jak zbudowany jest ciąg (7) — jego wyrazami są liczby całkowite, będące końcówkami, które mają własność niezmieniania się przy podnoszeniu do kwadratu.

Ciąg (7) spełnia warunek Cauchy'ego względem odległości d_{10}, jest więc zbieżny, bo tak postanowił Dekret nr 3 będący zresztą fragmentem Dekretu nr 4. Jego granicą jest pewna liczba 10-adyczna a. Z przedstawionych rachunków wynika od razu, że $a^2 = a$. Równanie $x^2 - x = 0$ ma wśród liczb 10-adycznych co najmniej trzy pierwiastki: 0, 1, i ....212890625. Startując z końcówek 6, 76, 376, ... możemy w ten sam sposób znaleźć jeszcze jeden pierwiastek (innych już nie będzie).

Teorię podzielności przez liczby złożone możemy „złożyć" z teorii podzielności przez liczby pierwsze i to jest główny powód tego, że najważniejsze są liczby p-adyczne, gdzie p jest liczbą pierwszą. Jak wypowiedzieć, że liczby całkowite m i n są „bliskie z punktu widzenia podzielności przez potęgi pewnej liczby pierwszej p", inaczej: bliskie względem odległości p-adycznej? Należy te liczby zapisać w układzie o podstawie p i spojrzeć, ile zer na końcu ma różnica $m-n$. Przykładowo, zapiszemy liczbę 2129 w układzie siódemkowym:

2129:7 = 304 i reszta 1,

304:7 = 43 i reszta 3,

43:7 = 6 i reszta 1,

6:7 = 0 i reszta 6.

....210832
+....117295
....328127

....321321321321
× 14
.....52852852285284
......1321321321321
.....98498498498494

....212890625
× 212890625
......1064453125
......426781250
......77343750
......015625
......25000
......1250
......635
......50
......8212890625

Rozwiązanie zadania M 169

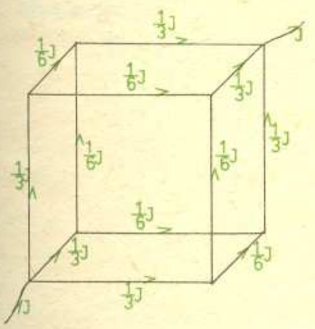
Z podobieństwa trójkątów BEF i DEA oraz BEA i DEG mamy

$$\frac{FE}{AE} = \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EG},$$

skąd $EF \cdot EG = AE^2$, c.n.d.

Rozwiązanie zadania F 57

Przekątna sześcianu przechodząca przez wierzchołki A i B jest trzykrotną osią symetrii. Innymi słowy, obrót sześcianu wokół tej przekątnej o 120° niczego nie powinien zmieniać. Biorąc pod uwagę to, że natężenia prądów płynących przez poszczególne krawędzie są wyznaczone jednoznacznie, z symetrii układu jako jedyny możliwy rozkład natężeń otrzymujemy rozkład pokazany na rysunku. Zwróćmy uwagę, że natężenia prądów płynących przez przeciwległe krawędzie są jednakowe. Wynika stąd, że w punkcie O natężenie pola magnetycznego od każdej pary przeciwległych krawędzi jest równe zeru (pole od jednej krawędzi jest przeciwnie skierowane niż od drugiej). Ponieważ krawędzie sześcianu można pogrupować w sześć takich par, więc całkowite natężenie pola również powinno być równe zeru. Oczywiście natężenie prądu oraz długość krawędzi nie mają znaczenia.



Zapis liczby 2129 w układzie siódemkowym ma postać 6131; cyframi tego zapisu są otrzymane przez nas reszty. Podobnie obliczymy, że 365 ma zapis siódemkowy 1031, więc

$$d_7(2129,\ 1031) = 7^{-2} = \frac{1}{49},$$

liczba „dwa tysiące sto dwadzieścia dziewięć" jest odległa w 7-adycznym sensie od liczby „trzysta sześćdziesiąt pięć" o nieco więcej niż dwie setne.

Widzieliśmy już przy konstrukcji liczb niewymiernych, że mierzenie dystansu między liczbami liczbą wspólnych zer różnicy wprawdzie zmienia prawie wszystkie odległości, ale pozostaje bez wpływu na zbieżność ciągów — i to pozwalało dostrzec silne analogie między treścią Dekretu nr 2 a Dekretu nr 4. Wyrażając się nieco dokładniej: liczby p-adyczne powstają w wyniku przejścia granicznego dość podobnego charakteru jak przejście graniczne prowadzące do liczb niewymiernych.

Wprowadzenie liczb całkowitych 7-adycznych odbywa się dzięki Dekretowi nr 4 w wersji siódemkowej. Z punktu **d)** tego Dekretu wynika, że każda liczba 7-adyczna ma zapis postaci np. .....356143206 (przypomina on, że liczba ta jest 7-adyczną granicą ciągu 6, 206, 3206, 43206, 143206, 6142306, ... — wyrazy ciągu są zapisane w układzie siódemkowym; w układzie dziesiątkowym mielibyśmy 6, 104, 1133, 10737, ...). Przy zapisywaniu liczb np. 11-adycznych musielibyśmy mieć dodatkowy znak na cyfrę „10" (nie: liczbę 10). Przypomina to sytuację, z jaką zawsze mamy do czynienia w układach niedziesiątkowych.

Zbiór całkowitych liczb p-adycznych oznaczamy przez $\hat{Z}_p$. Są w nim określone działania dodawania, odejmowania i mnożenia. Okazuje się, że gdy p jest liczbą pierwszą, to można określić wymierne liczby p-adyczne jako „ułamki" $\frac{m}{n}$, gdzie $m,\ n \in \hat{Z}_p$ i $n \neq 0$ — zupełnie podobnie jak ze zwykłych liczb całkowitych tworzymy ułamki znane ze szkoły. Zbiór liczb wymiernych p-adycznych oznaczamy przez $\hat{Q}_p$. Określone w nim cztery zasadnicze działania arytmetyczne podlegają wszystkim podstawowym prawom „zwykłej" algebry. Widzieliśmy już, że w zakresie liczb z $\hat{Z}_{10}$ wielomian mógł mieć więcej pierwiastków niż wynosi jego stopień — trudno byłoby to uznać za rzecz normalną. Podobnego charakteru anomalie sprawiają, że przy m złożonym liczby m-adyczne nie są tak miłe jak przy m będącym liczbą pierwszą. Wspominaliśmy już o tym, że ułamki liczb m-adycznych można tworzyć tylko przy pierwszych m. Gdy m jest liczbą pierwszą, możemy liczby m-adyczne dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Podzielimy w $\hat{Q}_7$ liczbę 163 przez 346. Zwracamy uwagę, że 163 oznacza tu zapis siódemkowy pewnej liczby (jakiej? Takiej: $1 \cdot 7^2 + 67^1 + 37^0$, czyli pięćdziesiąt osiem). Każda liczba całkowita x jest p-adyczna (jest p-adyczną granicą ciągu stałego: $x, x, x, x, \ldots$). Zaczynamy od szukania ostatniej cyfry ilorazu. Metodą prób znajdujemy, że jest nią 4. Posuwamy się więc dalej w sposób podobny jak przy zwykłym dzieleniu.

```
......064
  163:346
   ...053
  .....110
  .....110
     ....
```

Ilorazem jest liczba 7-adyczna, kończąca się na ....064. Liczby wymierne p-adyczne można zapisywać w postaci dziesiętnej podobnie jak „zwykłe" liczby wymierne. Przykładowo, liczba 0,64, wyrażająca np. ułamek p-adyczny $\frac{64}{100}$, odpowiada zapisowi $0p^0 + 6p^{-1} + 4p^{-2}$. Ponieważ z liczbami p-adycznymi jest zawsze na opak (znów Delta nr 7/77), więc Czytelnik nie powinien się dziwić, że w zapisie p-adycznym liczb wymiernych po przecinku może występować tylko skończona liczba cyfr, za to przed przecinkiem — nieskończona lub skończona, rzecz jasna. W zbiorze $\hat{Q}_p$ umiemy również mierzyć odległości: jak i w $\hat{Z}_p$ patrzymy na liczbę końcowych zer różnicy danych liczb.

Otrzymana przestrzeń metryczna ma wiele dobrych własności, choćby tę, że każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny albo że z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny. Również pod względem własności odległości $\hat{Q}_p$ przypomina nieco R. Do ciał p-adycznych możemy w sensowny sposób przenosić prawie wszystkie pojęcia analizy matematycznej, a z algebraicznego punktu widzenia $\hat{Q}_p$ ma bardziej uporządkowaną budowę niż trochę bezładnie (podkreślamy, z algebraicznego punktu widzenia) skomponowany zbiór liczb rzeczywistych. Na przykład taki problem matematyczny, jak poszukiwanie pierwiastków wymiernych równań kwadratowych jednorodnych wielu zmiennych jest dość trudny, ale można go rozłożyć na dwa prostsze: poszukiwanie pierwiastków rzeczywistych i p-adycznych. Jest to treść twierdzenia Minkowskiego-Hasse. Liczby p-adyczne istnieją „równie dobrze" jak niewymierne (a także jak zespolone, a nawet wymierne i całkowite), a wydają się dziwne, bo w życiu codziennym spotykają się z nimi tylko matematycy.