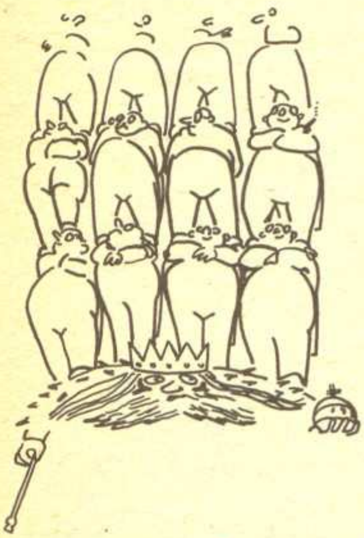
1/♛ = ?



hierarchia?

Niech teraz $p_1, \ldots, p_n$ będzie ciągiem liczb spełniających założenia twierdzenia Jensena. Wykażemy następującą nierówność:

Nierówność dla średniej geometrycznej. *Dla dowolnych* $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$: $x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \leqslant p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$ *przy czym równość ma miejsce tylko wtedy, gdy* $x_1 = \ldots = x_n$.

Dla dowodu wystarczy obrać liczby t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tak, że $x_i = 10^{t_i}$ i zastosować nierówność Jensena do funkcji wykładniczej $t \to 10^t$ wypukłej w dół w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Zauważmy, że dla $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ otrzymujemy nierówność $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$, która orzeka, że średnia geometryczna skończonego układu liczb nie przekracza średniej arytmetycznej.

Możemy teraz łatwo udowodnić następujące:

Twierdzenie (maksimum iloczynu przy stałej sumie) *Jeśli suma n liczb dodatnich* $x_1, \ldots, x_n$ *jest stała, to iloczyn* $x_1^{q_1} \ldots, x_n^{q_n}$ *gdzie* $q_1, \ldots, q_n$ *są dowolnymi liczbami dodatnimi ma największą wartość wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{x_1}{q_1} = \ldots = \frac{x_n}{q_n}$.

Dowód: Połóżmy $c = x_1 + \ldots + x_n$, $q = q_1 + \ldots + q_n$; stosując nierówność dla średniej geometrycznej otrzymujemy: $\left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{\frac{q_1}{q}} \ldots \left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{\frac{q_n}{q}} \leqslant \frac{c}{q}$, stąd $\left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{q_1} \ldots \left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{q_n} \leqslant \left(\frac{c}{q}\right)^q$; iloczyn $x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$ jest największy, gdy największy jest iloczyn po lewej stronie ostatniej nierówności, a więc gdy $\frac{x_1}{q_1} = \ldots = \frac{x_n}{q_n}$.

Dowód twierdzenia podanego niżej przebiega podobnie.

Twierdzenie (minimum sumy przy stałym iloczynie). *Jeżeli iloczyn* $x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$ *jest stały, to suma* $x_1 + \ldots + x_n$ *ma najmniejszą wartość, gdy* $\frac{x_1}{q_1} = \ldots = \frac{x_n}{q_n}$.

Przykłady.

a) *Spośród wszystkich trójkątów o danym obwodzie wyznaczyć trójkąt o największym polu*

Niech $2p$ będzie obwodem trójkąta o bokach x, y, z; kwadrat jego pola jest dany wzorem Herona: $p(p-x)(p-y)(p-z)$. Ponieważ $(p-x)+(p-y)+(p-z) = p$ i $p-x > 0, p-y > 0, p-z > 0$, zatem iloczyn $(p-x)(p-y)(p-z)$ jest największy, gdy $p-x = p-y = p-z$, a więc rozwiązaniem zadania jest trójkąt równoboczny.

b) *Spośród wszystkich prostopadłościanów o danej objętości wyznaczyć prostopadłościan o najmniejszym polu powierzchni.* Niech v będzie objętością prostopadłościanu o krawędziach x, y, z. Pole powierzchni prostopadłościanu jest zatem równe $2(xy+xz+yz)$. Ponieważ $(xy)(xz)(yz) = v^2$ oraz $xy > 0$, $xz > 0$, $yz > 0$ zatem suma $yx+yz+xz$ jest najmniejsza, gdy $xy = xz = yz$, a więc gdy $x = y = z$. Rozwiązaniem zadania jest sześcian.

Proponujemy Czytelnikowi rozwiązanie podanych niżej zadań.

Zadania.

1) Znaleźć największą wartość funkcji $\sin x + \sin y - \sin(x+y)$ w trójkącie ograniczonym osiami x, y i prostą $x+y = 2\pi$.

2) Spośród wszystkich prostopadłościanów o danym polu powierzchni wyznaczyć prostopadłościan o największej objętości.

2) Niech p, q będą liczbami dodatnimi. Znaleźć maksimum funkcji $(\cos x)^p(\sin x)^q$ w przedziale $\langle 0, 2\pi)$.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 166. Wyznaczyć największą wartość sumy liczb naturalnych x i y spełniających równanie $2x+5y = 70$.

Rozwiązanie na str. 10

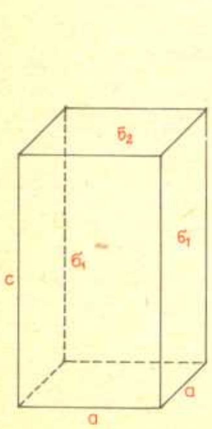
M 167. Na płaszczyźnie dana jest prosta k oraz punkty A i B leżące po różnych jej stronach. Wyznaczyć na prostej k punkt X, dla którego $|AX-BX|$ przyjmuje wartość największą.

Rozwiązanie na str 7.

M 168. Funkcja f jest określona na przedziale $(0, 1)$ wzorem $f(x) = x^2(1-x)^3$. Obliczyć największą wartość tej funkcji.

Rozwiązanie na str. 11

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI



F 55. Napięcie powierzchniowe na płaskiej granicy kryształu i roztworu zależy od orientacji tej granicy względem kierunków krystalograficznych.

Napięcia powierzchniowe kryształu pokazanego na rysunku, znajdującego się w roztworze nasyconym tej samej substancji, z której zbudowany jest kryształ, na wzajemnie prostopadłych ścianach wynoszą odpowiednio σ_1, σ_1 i σ_2. Kryształ znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej z roztworem. Należy wyznaczyć stosunek krawędzi a/c. Wpływ siły ciężkości na kryształ i roztwór zaniedbujemy.

Rozwiązanie na str. 4