

Mała delta



Lepiej być małym czy dużym?



Porównajmy sylwetkę słonia z sylwetką myszy. Dlaczego małe zwierzęta są zgrabniejsze od dużych? Okazuje się, że wszystko tłumaczy proste rachunki. Oto dwie kulki z plasteliny — jedna o średnicy 1 cm, druga o średnicy 2 cm. Przyjmując, że gęstość plasteliny jest równa w przybliżeniu 1 g/cm³, obliczmy, ile ważą te kulki i jaka jest ich powierzchnia. Oto odpowiednie wzory.

Objętość kuli o promieniu $R = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Pole powierzchni kuli o promieniu $R = 4\pi R^2$.

Dla pierwszej z kulek $R = \frac{1}{2}$ cm, stąd jej objętość jest równa $\frac{4}{3} \pi \cdot \frac{1}{8} \text{ cm}^3 = \frac{1}{6} \pi \text{ cm}^3$. A więc kulka ta ma masę $\frac{\pi}{6} \text{ g} \approx 0,5 \text{ g}$. Pole jej powierzchni jest równe $4\pi \cdot \frac{1}{4} \text{ cm}^2 = \pi \text{ cm}^2 \approx 3 \text{ cm}^2$. Dla drugiej z kulek $R = 1$ cm, stąd jej objętość jest równa $\frac{4}{3} \pi \text{ cm}^3$. A więc

kulka ta ma masę $\frac{4}{3} \pi \text{ g} \approx 4 \text{ g}$ (8 razy więcej niż poprzednia). Pole jej powierzchni jest równe $4\pi \text{ cm}^2 \approx 12 \text{ cm}^2$ (tylko czterokrotnie więcej niż poprzednio). Wyniki obliczeń zestawmy w tabelce, której ostatnia rubryka informować będzie, ile gramów masy przypada na 1 cm² powierzchni danej kulki. Wniosek: im mniejsza kulka, tym mniej gramów jej masy przypada na centymetr kwadratowy powierzchni.

Jaka kulka	Masa	Powierzchnia	Ile gramów masy przypada na 1 cm ² powierzchni
kulka o średnicy 1 cm	0,5 g	3 cm ²	0,17 g/cm ²
kulka o średnicy 2 cm	4 g	12 cm ²	0,33 g/cm ²

Tyranozaur - największy drapieżnik lądowy. Ważył 8 ton



Najmniejszy ptak świata - Koliber - waży zaledwie 1,6 grama



Diatryma - największy ptak drapieżny. Wzrost około 2 m.





Gigantopitek - największa znana małpa. Ważył około 300kg. Wzrost jego dochodził prawdopodobnie do 2,7m.

Spróbujmy teraz wyjaśnić, co by się stało, gdyby mała mysz powiększyć proporcjonalnie do wielkości słonia? Otóż na 1 cm^2 powierzchni przekroju poprzecznego jej kości przypadałoby po tym zabiegu prawie stokrotnie więcej masy ciała!

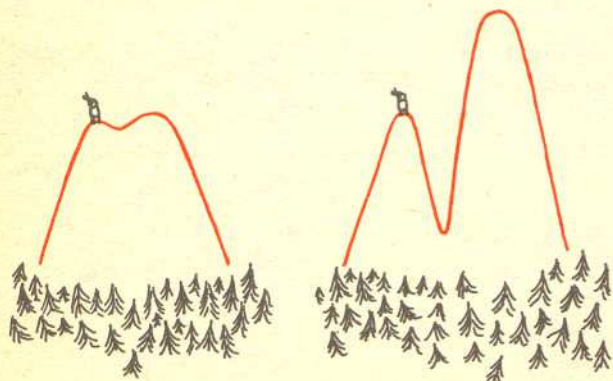
A przecież wytrzymałość kości na złamanie jest proporcjonalna do jej przekroju poprzecznego! Mała mysz, dzięki swym małym wymiarom, może być zbudowana lżej i zgrabniej. Małe wymiary mają jednak i swoje minusy. Gdy zależy nam, by na mrozie stracić jak najmniej ciepła, lepiej gdy na jednostkę masy przypada jak najmniej powierzchni. Tłumaczy to, dlaczego zwierzęta żyjące w chłodniejszym klimacie są większe niż osobniki tego samego gatunku z okolic cieplejszych.

A swoją drogą, jakie to dziwne, że świat wokół nas nie jest wcale jednorodny — to, co małe, rządzi się innymi prawami niż to, co duże. A matematyka przekonuje nas, że gigantyczna małpa King Kong, wielkości sporego domu, to zupełnie nierealna fantazja.



Wycieczki po maksimach, minimach i punktach przegięcia

„Burza szalała bez przerwy. Dwaj alpinisci byli już u kresu sił, ale krok po kroku pięli się w górę. Śnieg zasypywał im oczy, a wiatr chciał zepchnąć ich w dolinę. Szli już trzy godziny od obozu VII. Nagle droga pod górę skończyła się. Mimo zadymki widzieli, że przed nimi tylko droga w dół. Byli na szczycie!”. Alpinisci rozmawiali tak: skoro wszystkie drogi prowadzą już w dół, jesteśmy na szczycie. Czy to jest poprawne rozumowanie? Zależy to, niestety, od tego, co nazwiemy szczytem (rys. 1). Na pytanie postawione na rysunku 1 większość ludzi odpowie „nie”, przeciwnie niż na rysunku 2.

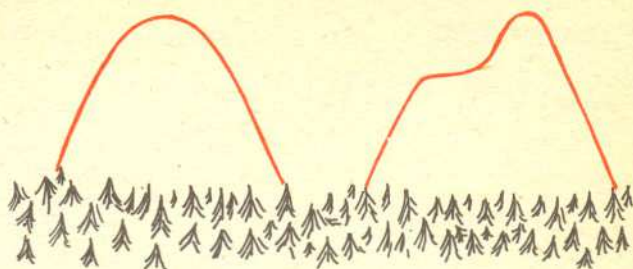


Rys. 1. Czy alpinista jest na szczycie?

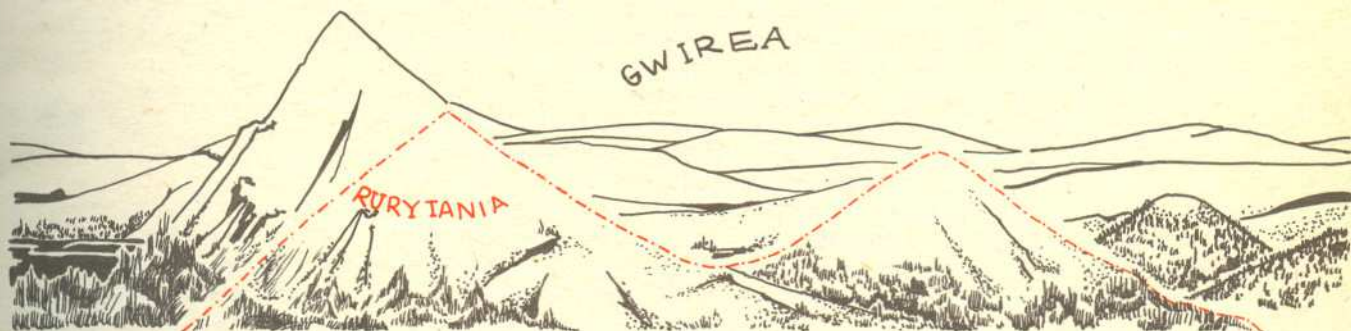
Rys. 2. A teraz?

W matematyce odróżniamy pojęcie „maksimum” funkcji od jej „wartości największej”. Funkcja ma maksimum w punkcie x , jeżeli blisko tego punktu nie ma wartości większych, a „największą wartość” — jeżeli w ogóle nie przyjmuje większych wartości. Każdy wierzchołek górski tworzy maksimum (funkcji „wysokość”). Z wierzchołka nie ma drogi pod górę.

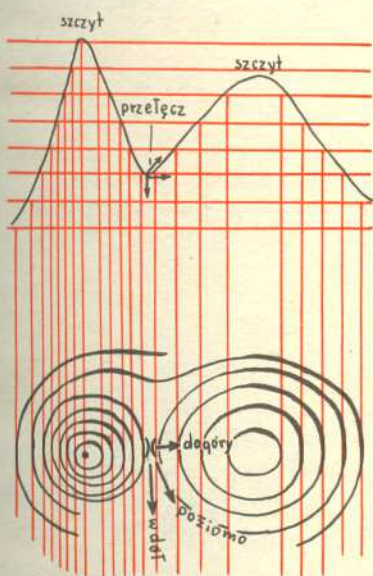
Wśród szczytów tatrzańskich tylko jeden jest największy, ale są funkcje, które przyjmują swą największą wartość w wielu punktach (rys. 3). Jeżeli zawężymy obszar, na którym rozpatrujemy funkcję, możemy dostać inną wartość największą. To zrozumiałe, że funkcja „wysokość” kulminuje gdzie indziej w Tatrach Polskich, całych Tatrach, a jeszcze gdzie indziej na obszarze całej Ziemi. Przy ograniczaniu obszaru może się nawet zdarzyć, że największa wartość funkcji w jednym obszarze nie będzie nawet maksimum w większym. Widzimy to na rysunku 4. Najwyższe wzniesienie Rurytania nie jest w ogóle szczytem dla Gwirczyków. Ale przy dowolnych zmianach granic każdy szczyt zostanie szczytem.



Rys. 3. Te dwie góry mają te same wysokości.



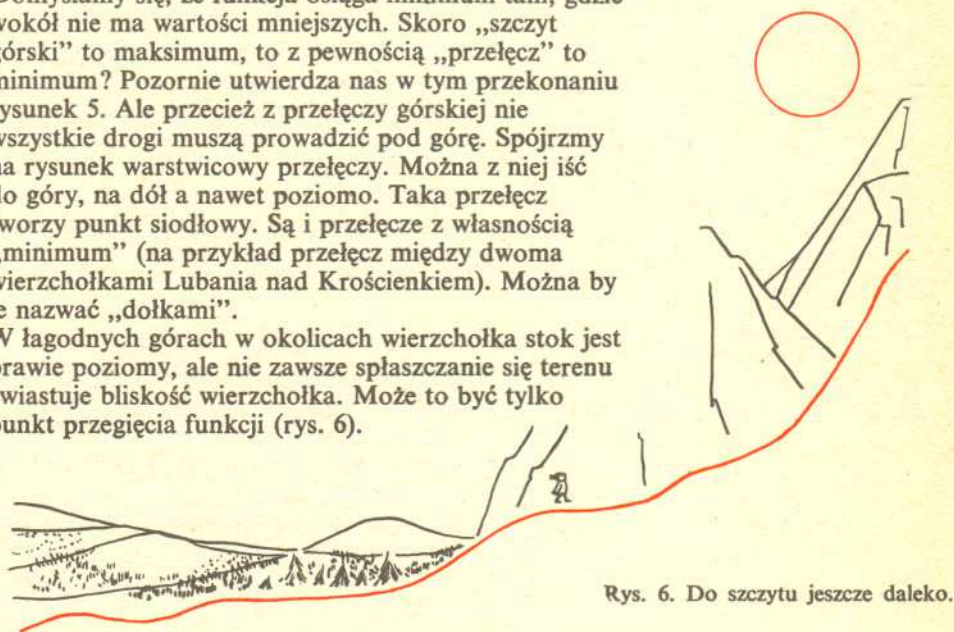
Rys. 4.



Rys. 5. Przełęcz-siodło.

Domyślamy się, że funkcja osiąga minimum tam, gdzie wokół nie ma wartości mniejszych. Skoro „szczyt górski” to maksimum, to z pewnością „przełęcz” to minimum? Pozornie utwierdza nas w tym przekonaniu rysunek 5. Ale przecież z przełęczy górskiej nie wszystkie drogi muszą prowadzić pod górę. Spójrzmy na rysunek warstwiczny przełęczy. Można z niej iść do góry, na dół a nawet poziomo. Taka przełęcz tworzy punkt siodłowy. Są i przełęcze z własnością „minimum” (na przykład przełęcz między dwoma wierzchołkami Lubania nad Krościenkiem). Można by je nazwać „dołkami”.

W łagodnych górach w okolicach wierzchołka stok jest prawie poziomy, ale nie zawsze spłaszczanie się terenu zwiastuje bliskość wierzchołka. Może to być tylko punkt przegięcia funkcji (rys. 6).



Rys. 6. Do szczytu jeszcze daleko.

Maksima i minima noszą wspólną nazwę ekstremów funkcji. To bardzo ważne pojęcie. Każdego z nas interesuje osiągnięcie maksymalnych efektów przy minimalnym (a nawet najmniejszym) nakładzie pracy i nie ma w tym nic złego. Minimum funkcji szuka i Natura. Ciało poruszają się po najkrótszych torach, choć w warunkach zakłóceń niekoniecznie są to linie proste, bańki mydlane starają się zawrzeć maksymalną objętość w minimalnej powierzchni, promienie świetlne wybierają najkrótsze drogi. Niemal w każdym dziale fizyki znajduje zastosowanie zasada minimum (sformułowana w połowie zeszłego wieku przez matematyka irlandzkiego Williama Rowana Hamiltona). Ta zasada mówi, że Natura działa w taki sposób, by pewna (ściśle określona, rzecz jasna) całka osiągała minimum. Jest to chyba najpotężniejsza pojedyncza zasada nauk ścisłych.