Okazuje się, że jest to możliwe. Rozważmy bowiem na osi liczbowej ciąg różnych punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz dowolny punkt x i utwórzmy wyrażenie

$$d(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x|.$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja $d(x)$ jest ciągła oraz jest malejąca, gdy x jest mniejszy od większości x_i (bo wtedy współczynnik przy x jest ujemny), i rosnąca, gdy x jest większy od większości x_i. A to właśnie oznacza, że minimum funkcji $d(x)$ osiągane jest w tych punktach x_i, które są medianami. Jeśli jeszcze weźmiemy pod uwagę fakt, że $|x_i - x|$ jest odległością punktów x oraz x_i, to stwierdzimy, że mediana jest rozwiązaniem następującego problemu:

Dany jest zbiór $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wyznaczyć punkt x_i taki, by suma odległości punktu x_i od punktów zbioru X była możliwie najmniejsza.

A to sformułowanie przenosi się już na dowolną przestrzeń wielowymiarową, może więc służyć jako definicja mediany w takiej przestrzeni.

Ale na tym możliwości uogólnień wcale się nie kończą. Zauważmy, że zarówno w wielowymiarowym problemie średniej, jak i wielowymiarowym problemie mediany, operuje się pojęciami zbioru, punktu i odległości. Łatwo więc widać, że oba problemy można sformułować w dowolnej

Por. artykuły M. Moszyńskiej w Delcie: 1/1975, 5/1975 i 8/1975.

Przestrzeni metrycznej

i — o ile problemy te mają rozwiązania — otrzymywać bardzo już odbiegające od intuicji „środki ciężkości": średnie i mediany.

Można jednak posunąć się jeszcze dalej. Zauważmy mianowicie, że zarówno występująca w problemie średniej suma kwadratów odległości, jak i występująca w problemie mediany suma odległości są pewnego rodzaju miarami rozproszenia zbioru X wokół punktu x. Są to funkcje bardzo specjalnej postaci. Można by pokusić się o określenie innych jeszcze miar rozproszenia i poszukiwanie ich minimów. Minima takie byłyby też swojego rodzaju „środkami ciężkości". Jak więc widać, można drogą kolejnych uogólnień sformułować następujący

O $r_X(x)$ zakładamy, że wyraża się przez odległości punktu x od elementów zbioru X

Problem środka ciężkości:

W przestrzeni metrycznej (A, ϱ) dany jest skończony zbiór X oraz miara rozproszenia $r_X(x)$, $x \in A$. Wyznaczyć minimum funkcji r_X.

Rozwiązanie takiego problemu — o ile istnieje — nazwiemy środkiem ciężkości zbioru X w przestrzeni (A, ϱ) względem miary rozproszenia r_X.

Tak rozumiane pojęcie środka ciężkości jest nie tylko bezpośrednim uogólnieniem pojęć, od których startowaliśmy. Powstaje ono również w naturalny sposób w zastosowaniach matematyki w naukach społecznych. Ale o tym kiedy indziej.

Problem: czy można podać na prostej taką metrykę i taką miarę rozproszenia, by rozwiązaniem problemu środka ciężkości była (a) średnia geometryczna, (b) średnia harmoniczna? (Autor nie zna rozwiązania.)

Zadanie 1. Wyznaczyć średnie i mediany zbioru X złożonego z punktów (0, 0), (1, 0), (0, 1) i (2, 3) na płaszczyźnie z metrykami: kartezjańską, miejską, kolejową (por. Delta 1/1975).

Zadanie 2. Zbadać problem środka ciężkości na prostej ze zwykłą metryką i miarą rozproszenia postaci

$$r_X(x) = \sum_{i=1}^{n} [\varrho(x, x_i)]^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Kącik filatelistyczny (5)

Johannes Kepler (1571—1630), niemiecki astronom i matematyk, sformułował prawa ruchu planet znane do dziś jako trzy prawa Keplera. Prawa te miały zasadnicze znaczenie dla zrozumienia ruchu ciał przyciągających się siłami grawitacyjnymi i zostały uzasadnione przez Newtona. Skonstruował także lunetę astronomiczną, odmienną od lunety Galileusza. Reprodukujemy znaczek wydany przez Republikę Dahomeju w roku 1971, na którym obok portretu uczonego przedstawione są symboliczne orbity planet. Znaczki poświęcone Keplerowi wydano także w Austrii (w roku 1953), Meksyku (1971), NRD (1971), RFN (1971), i Rumunii (1971).

Jerzy BARTKE