Wielościany z minimalną ilością powtórzeń (I)

Małgorzata ZALEWSKA

Artykuł ten jest nieco przeredagowaną pracą maturalną wykonaną przez Autorkę w 1977 roku w Liceum im. K. Gottwalda

W artykule tym zajmować się będziemy wielościanami wypukłymi. Ustalmy najpierw terminologię. Będziemy mówili, że ściany wielościanu są tego samego rodzaju, gdy mają tę samą liczbę boków. Jeżeli oznaczamy liczbę ścian wielościanu $\mathscr{W}$ przez $s(\mathscr{W})$ a liczbę rodzajów ścian przez $r(\mathscr{W})$ to $s(\mathscr{W})-r(\mathscr{W})$ nazywać będziemy ilością powtórzeń w tym wielościanie.
Jak można wykazać, każdy wielościan ma dwie ściany tego samego rodzaju. My udowodnimy nawet więcej — a mianowicie: dla każdego wypukłego wielościanu $\mathscr{W}$

$$s(\mathscr{W})-r(\mathscr{W}) \geqslant 3.$$

Dowód: Załóżmy, że w danym wielościanie $\mathscr{W}$ ścianą o największej liczbie krawędzi jest $k(\mathscr{W})$ — kąt. Ścian w tym wielościanie musi być co najmniej $k(\mathscr{W})+1$ (gdyż $k(\mathscr{W})$ — kąt może mieć co najwyżej jedną krawędź wspólną z każdą inną ścianą) więc

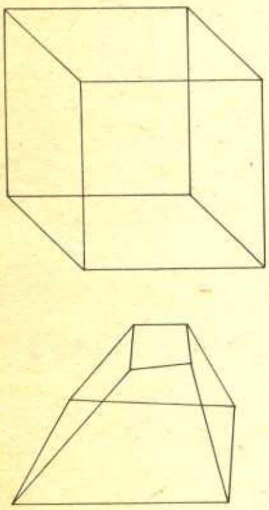
$$s(\mathscr{W}) \geqslant k(\mathscr{W})+1.$$

Rodzajów ścian może być co najwyżej $k(\mathscr{W})-2$ gdyż i-kąt może być ścianą tego wielościanu tylko dla $i = 3, 4, \ldots, k(\mathscr{W})$ więc $r(\mathscr{W}) \leqslant k(\mathscr{W})-2$. Stąd

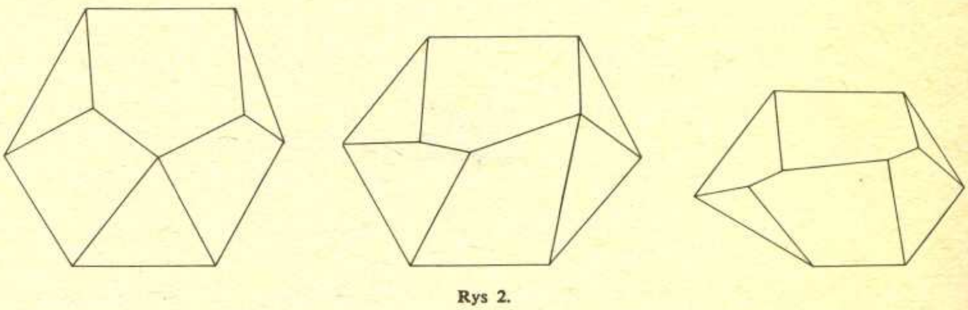
$$s(\mathscr{W})-r(\mathscr{W}) \geqslant k(\mathscr{W})+1-(k(\mathscr{W})-2) = 3.$$

A więc w każdym wielościanie są co najmniej trzy powtórzenia.
Postaramy się teraz znaleźć wszystkie (z dokładnością do homeomorfizmu, zachowującego wierzchołki i krawędzie) wielościany z trzema powtórzeniami. Inaczej mówiąc będziemy szukać reprezentantów wszystkich klas wielościanów, przy czym dowolny wielościan z danej klasy można przekształcić na dowolny wielościan z tej samej klasy za pomocą homeomorfizmu, zachowującego wierzchołki i krawędzie. Do tej samej klasy należą wielościany mające ściany tego samego rodzaju ułożone w ten sam sposób, np. wielościany na rys. 1. Wielościany na rys. 2. należą do dwóch różnych klas, mimo że mają ściany tego samego rodzaju. Są one ułożone w różny sposób.

Dokładniej: homeomorfizmy wielościanów zachowujące własności: „być krawędzią" i „być wierzchołkiem".



Rys 1.



Rys 2.

Wielościany z trzema powtórzeniami mają wiele ciekawych własności. Zaznajomienie się z nimi pozwoli nam na znalezienie wszystkich klas tych wielościanów. Przytoczymy teraz te własności wraz z niektórymi dowodami.
Ponieważ dalej będziemy zajmować się tylko wielościanami z trzema powtórzeniami, mówiąc „wielościan" będziemy mieli na myśli taki właśnie wielościan. Przyjmijmy, że wielościan, w którym ścianą o największej liczbie boków jest k-kąt, nazywać będziemy „wielościanem z k-kątem".
Mówiąc „jedyny wielościan" mamy na myśli jedyny z dokładnością do homeomorfizmu, zachowującego wierzchołki i krawędzie.

Własności wielościanów

1. Dla wszystkich $i = 3, 4, \ldots, k$ wielościan z k-kątem zawiera ściany, będące i-kątami.

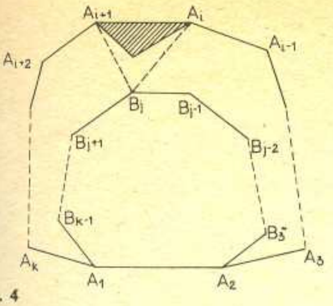
2. W wielościanie z k-kątem każda ściana ma krawędź wspólną z k-kątem.

3. W wielościanie z k-kątem dokładnie jedna ściana nie ma krawędzi wspólnej z (k-1)-kątem.

4. W wielościanie zawierającym co najmniej dwa k-kąty (oznaczmy je $A_1 \ldots A_k$ i $B_1 \ldots B_k$):
(a) wielokąty te mają wspólną krawędź (przyjmiemy, że $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$),
(b) ściany zawierające krawędzie A_1A_k i B_1B_k oraz A_2A_3 i A_2B_3 są trójkątami.

Dowód (a) wynika bezpośrednio z własności **2.** Przy dowodzie (b) z tej samej własności wnioskujemy, że istnieje ściana zawierająca krawędzie A_kA_{k-1} i B_kB_{k-1} (rys. 3). Ściana ta ma dwa punkty wspólne ze ścianą zawierającą krawędzie A_1A_k i A_1B_k, w takim razie ściany te mają wspólną krawędź A_kB_k, czyli ściana zawierająca krawędzie A_1A_k i A_1B_k jest trójkątem $A_1A_kB_k$.

Rys 3.



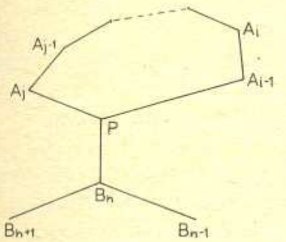
Rys. 4

5. W wielościanie zawierającym dokładnie jeden k-kąt $A_1 \dots A_k$ i $(k-1)$-kąt $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$ ściana, zawierająca krawędzie A_2A_3 i A_2B_3 lub A_1A_k i A_1B_{k-1} jest trójkątem. Dowód jest taki sam, jak dla własności **4**. Uwaga: obie ściany, zawierające krawędzie A_1A_k i A_1B_{k-1} oraz A_2A_3 i A_2B_3 nie muszą jednocześnie być trójkątami, gdyż z własności **3** wynika, że istnieje dokładnie jedna ściana nie mająca krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$ (por. rys. 4).

6. W wielościanie zawierającym dokładnie jeden k-kąt ściana, która nie ma krawędzi wspólnej z $(k$-$1)$-kątem, jest trójkątem.

Szkic dowodu:
Oznaczmy: $A_1A_2 \dots A_k$—k-kąt, $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$—$(k-1)$-kąt. Niech ściana zawierająca krawędź A_iA_{i-1} nie ma krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem (rys. 5). Na mocy własności **3**, ściana zawierająca krawędź A_iA_{i-1} jest jedyną ścianą nie mającą krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$. Wystarczy zauważyć, że ściany, zawierające krawędzie $A_{i-1}A_i$ i $A_{i+1}A_{i+2}$, mają krawędzie wspólne z $(k-1)$-kątem $A_1 \dots B_{k-1}$ i wspólny wierzchołek B_j. (Gdyby ściana o krawędzi $A_{i+1}A_{i+2}$ zawierała np. krawędź B_jB_{j+1}, a ściana o krawędzi $A_{i-1}A_i$ krawędź $B_{j-2}B_{j-1}$, to ściana o krawędzi $B_{j-1}B_j$ nie miałaby krawędzi wspólnej z k-kątem $A_1 \dots A_k$, co jest sprzeczne z własnością **2**.)

7. Jeżeli w wielościanie, zawierającym dokładnie jeden k-kąt, wierzchołek P nie należy do k-kąta, ani do $(k-1)$-kąta, to istnieje trójkąt o wierzchołku P i podstawie należącej do k-kąta, a więc nie mający punktów wspólnych z $(k-1)$-kątem.



Rys. 5

Dowód: Oznaczmy k-kąt — $A_1A_2 \dots A_k$, $(k-1)$-kąt — $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$ (rys. 5). P jest wierzchołkiem wielościanu, więc istnieją co najmniej trzy ściany o wierzchołku P. Wszystkie te ściany muszą mieć krawędź wspólną z k-kątem, co najwyżej jedna z tych ścian może nie mieć krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem, więc istnieją co najmniej dwie ściany mające krawędzie wspólne z k-kątem $A_1A_2 \dots A_k$ i $(k-1)$-kątem $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$. Załóżmy, że są to ściany, zawierające krawędzie $A_{i-1}A_i$ i A_jA_{j+1} $(i \leqslant j)$. Ściany te mają wspólną krawędź B_nP (w przeciwnym przypadku istniałaby ściana, nie mająca krawędzi wspólnej z k-kątem). Ściany, zawierające krawędzie $A_iA_{i+1}, \dots, A_jA_{j-1}$ nie mają krawędzi wspólnych z $(k-1)$-kątem. Z własności **3** wiemy, że istnieje dokładnie jedna ściana, nie mająca krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem, więc $j = i+1$ lub $i = j$. Gdyby $i = j$, to wierzchołek P należałby jedynie do dwóch ścian, co jest niemożliwe.

8. W wielościanie, zawierającym dokładnie jeden k-kąt, co najwyżej jeden wierzchołek nie należy do k-kąta ani do $(k-1)$-kąta (wniosek z własności **3** i **7**).

9. Jeżeli w wielościanie $\mathscr{W}$, zawierającym dokładnie jeden k-kąt, istnieje wierzchołek, nie należący do k-kąta ani do $(k-1)$-kąta, to liczba $l(\mathscr{W})$ wszystkich wierzchołków w tym wielościanie równa jest $l(\mathscr{W}) = k+(k-1)-2+1 = 2k-2$, a jeżeli taki wierzchołek nie istnieje — $l(\mathscr{W}) = 2k-3$.

Korzystając z własności **1–9** pokażemy, dla jakich k mogą istnieć wielościany z k-kątem.

10. Jeżeli w wielościanie $\mathscr{W}$ zawierającym dokładnie jeden k-kąt
 (a) $l(\mathscr{W}) = 2k-2$, to $6 \leqslant k \leqslant 7$,
 (b) $l(\mathscr{W}) = 2k-3$, to $4 \leqslant k \leqslant 6$.
W wielościanie zawierającym dokładnie jeden k-kąt musi być $k > 3$, gdyż dla $k = 3$ nie istnieje $(k-1)$-kąt.

Dowód **(a)**: Dla $k = 4$ otrzymujemy wielościan, należący do tej samej klasy, co graniastosłup o podstawie trójkątnej. Ma on 3 k-kąty. Dla $k > 4$ w wielościanie istnieje co najmniej jeden pięciokąt, różny od k-kąta (p. dowód własności **7**), więc musi być $k > 5$.
Przyjmijmy $k \geqslant 6$. W wielościanie $\mathscr{W}$ istnieje co najmniej jeden pięciokąt, oprócz pięciokąta są jeszcze: k-kąt, $(k-1)$-kąt, czworokąty i trójkąty, lecz nie ma i-kąta dla $5 < i < k-1$. W takim razie $(k-2)$-kąt jest co najwyżej pięciokątem, czyli $k \leqslant 7$.
Dowód **(b)** przebiega analogicznie.

Sformułowaliśmy twierdzenie, rozstrzygające, dla jakich k mogą istnieć wielościany, zawierające dokładnie jeden k-kąt. Podobne twierdzenie można udowodnić dla wielościanów, zawierających dokładnie dwa k-kąty.

11. Dla wielościanu $\mathscr{W}$ zawierającego co najmniej dwa k-kąty
 (a) $l(\mathscr{W}) = 2k-2$,
 (b) $k \leqslant 5$.

Dowód **(a)**: Należy wykazać, że nie istnieje wierzchołek P, nie należący do żadnego z k-kątów. Gdyby taki wierzchołek istniał, to musiałyby istnieć co najmniej trzy ściany o wierzchołku P, mające krawędzie wspólne z każdym z k-kątów, co jest niemożliwe.

Dowód **(b)**: Ponieważ w takim wielościanie nie ma innych wierzchołków niż wierzchołki dwóch k-kątów, więc $(k-1)$-kąt jest co najwyżej czworokątem, czyli $k \leqslant 5$.

W drugiej części artykułu, która ukaże się w Delcie 9/1978, omówimy wszystkie klasy wielościanów z k-kątem.