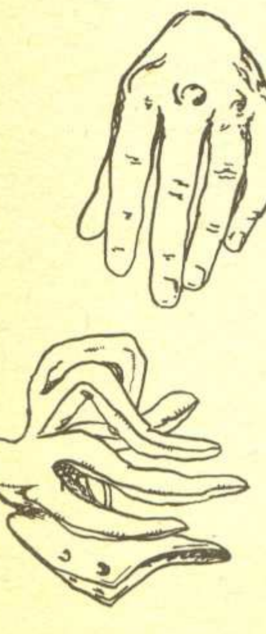
Modele matematyczne i jak z nich skorzystać

Prof. dr Tadeusz Traczyk

Jeśli jest prawdą, że motorem ludzkiej działalności jest pragnienie szczęścia, to owo szczęście ma tysiąc twarzy — każdy je widzi inaczej i nikt nie poznał jego istoty. Stąd wielość dróg, na których człowiek próbuje realizować swoje dążenie do szczęścia. Stąd także wielość kultur i możliwych cywilizacji. Prawdopodobnie gdzieś w basenie śródziemnomorskim w czasach zamierzchłych zrodziła się i opanowała ówczesnego człowieka idea podporządkowania sobie przyrody i przetwarzania jej na użytek swojej wizji szczęścia. Idea ta, idea władania środowiskiem, stała się zapewne korzeniem cywilizacji, która dziś dominuje w naszym świecie.

Okazało się jednak szybko, że przyrodą rządzą prawa, które nie są podległe woli człowieka: „Aby władać przyrodą, trzeba jej być posłusznym" powiedział Franciszek Bacon, jeden z pierwszych wielkich empiryków Odrodzenia. Stało się jasne, że poznanie praw przyrody jest koniecznym warunkiem opanowania jej. Badania podstawowe — odkrywanie praw rządzących przyrodą — znalazły społeczne uzasadnienie i nobilitację w europejskich kręgach cywilizacyjnych. Niemniej poszukując gorączkowo doraźnych korzyści ekonomicznych, praktycznych, często jeszcze zapominano o niezbywalnych wartościach tych badań nazywanych dla kontrastu teoretycznymi. Nawet Stanisław Staszic — otwierając szkołę przygotowawczą do Instytutu Politechnicznego w Warszawie w 1826 roku — powiedział: „Uczony teoretyk może być jeszcze próżniakiem, jeszcze tylko społeczeństwa ciężarem. On równie jak jego nauki bez celu będąc, stanie się w towarzystwie albo nudnym, albo z zbytnią o sobie zarozumiałością niespokojnym. Lecz ten uczony, który przez zastosowanie swoich nauk i umiejętności do wzrostu krajowych dostatków, do rozwijania narodowego przemysłu, ten będzie obywatelem użytecznym, ten stanie się współpracownikiem koło wszelkiego zamiaru społecznienia się ludów, koło powszechnego dobra" (*Gazeta Warszawska*, nr 5, 9.1.1826).

Matematyka była od czasów starożytnych uznanym narzędziem człowieka w jego staraniach o władanie przyrodą. Jej odkrycia często wyprzedzały postęp w innych dziedzinach wydając się przez to nieużytecznymi. Prawdziwy i szybki jej rozwój nastąpił jednak dopiero w czasach nowożytnych wraz z rozwojem nauk empirycznych — z nich głównie czerpała swoje problemy obdarzając je wzamian nowymi metodami badawczymi. Obdarzając tak hojnie, że nazwano ją królową nauk.



Zawsze tak się dzieje, że im doskonalsze człowiek stworzy sobie narzędzie pracy, tym trudniejszej jest poddawany próbie. Próbie sprostania nowej jakości — wykorzystania wszystkich walorów nowego narzędzia. Walorów, których tworząc je nawet nie przeczuwał. Matematyka jest narzędziem bardzo wymagającym. Jeśli pojęcia są ściśle zdefiniowane, założenie precyzyjnie sformułowane, to — dopiero wówczas — stosując uznane przez logikę reguły wnioskowania matematyk może wyprowadzać nowe tezy zwane zwykle twierdzeniami. Poprawnie wyprowadzone tezy mogą się okazać fałszywe jedynie wtedy, gdy fałszywe są założenia, z których je wyprowadzono. Takie postępowanie nazywa się dedukcją. Rozumowanie dedukcyjne jest trudne, dlatego też definicje i założenia powinny być możliwie najprostsze i w niewielkiej liczbie. Stąd pochodzi konieczność upraszczania i pewnej idealizacji stawianych przed matematykiem problemów, tzn. konieczność pomijania mniej ważnych założeń i szczegółów, upraszczania innych, i tym podobnych zabiegów. Nazywa się to budowaniem matematycznego modelu dla określonego fragmentu rzeczywistości fizycznej. Jest to krytyczny etap stosowania matematyki: jeśli bowiem model został źle dobrany, to choćby do dedukcji użyto potem najpiękniejszej i najbardziej zaawansowanej matematyki, jej wyniki — choć spełnione w tym modelu — są bez żadnej wartości dla tego fragmentu świata, którego mają dotyczyć. Gorzej: bardzo często prowadzą korzystającego z nich człowieka na manowce fałszywych konkluzji i fałszywych decyzji.

Czasem bywa inaczej: matematyczny model pasuje jak ulał do niewielkiego fragmentu rzeczywistości fizycznej, a przestaje pasować, gdy ten fragment powiększymy. Słowo „powiększymy" nie dotyczy odległości elementów, chodzi raczej o rozszerzenie zakresu badań np. o przejście od badań własności fizycznych pewnych obiektów do badania ich składu chemicznego lub jeszcze głębiej —

Rozwiązanie zadania F55

W układzie obracającym się ze stałą prędkością kątową na każdy punkt cieczy działa przyspieszenie ziemskie g (skierowane pionowo) i przyspieszenie odśrodkowe $\omega^2 r$ (skierowane poziomo, od osi obrotu). Pole g jest polem potencjalnym. Jego potencjałem jest $V_g = gz$. Również pole przyspieszenia odśrodkowego jest polem potencjalnym o potencjale $V_0 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$ (z i r zaznaczono na rysunku w treści zadania).

Potencjał układu pól jest sumą potencjałów poszczególnych pól, zatem każdy punkt cieczy znajduje się w polu przyspieszenia o potencjale:

$$V = V_g + V_0 = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2.$$

Wynika stąd, że powierzchnie ekwipotencjalne (V_g = const) są przystającymi paraboloidami o równaniach postaci

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{stała}.$$

Powierzchnie rozpatrywane w treści zadania z oczywistych powodów muszą być powierzchniami ekwipotencjalnymi. Podany wyżej związek oznacza więc, że powierzchnie te muszą być przystające.

Przy analizie powierzchni ekwipotencjalnych w układzie obracającym się w istotny sposób skorzystaliśmy z faktu, że ciecz jest w równowadze. Gdyby tak nie było, gdyby jakieś obszary cieczy miały w tym układzie niezerową prędkość, to należałoby uwzględnić jeszcze inne przyspieszenia, np. przyspieszenie Coriolisa, którego nie można opisać za pomocą potencjału i nasze rozważania straciłyby sens.

do badania cząstek elementarnych, z których są zbudowane. Z takiego modelu możemy z powodzeniem korzystać, jeśli uwzględnimy jego ograniczenia.
Np. wprowadzona przez Euklidesa geometria przestrzeni trójwymiarowej przez dwa tysiące lat była doskonałym modelem fizycznej przestrzeni, w której wszyscy żyjemy i poruszamy się. Nie wyobrażano sobie nawet, że może być inaczej. Jedynie wśród matematyków pewien niepokój wzbudzał słynny V postulat Euklidesa mówiący, że w płaszczyźnie wyznaczonej przez daną prostą l i dany punkt A nie leżący na prostej l istnieje co najwyżej jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca prostej l. W równoważnej postaci pewnik ten brzmi: suma kątów trójkąta płaskiego jest równa sumie dwóch kątów prostych. Podejrzewano, że ten pewnik jest konsekwencją pozostałych postulatów Euklidesa. Podejmowane wielokrotnie próby dowodu nie udawały się. I nie mogły się udać, ponieważ w XIX w. pokazano, że V postulat nie jest konsekwencją pozostałych. Powstały wtedy nowe geometrie, w których ten pewnik został odrzucony: geometria Łobaczewskiego i ogólniejsza od niej geometria Riemanna. Można było sądzić, że są to czysto myślowe konstrukcje nie mające zastosowania w naukach empirycznych.
I oto w 1913 roku Albert Einstein ogłosił swoją słynną szczególną teorię względności a potem ogólną teorię względności, poddając rewizji podstawowe zasady fizyki. W tych pracach Einstein przyjął właśnie riemannowski model czterowymiarowej przestrzeni; trzy wymiary określały położenie, czwartym wymiarem był czas: każdemu zdarzeniu w świecie fizycznym odpowiadał punkt w tej przestrzeni. Teoria względności świetnie wyjaśnia wynik różnych eksperymentów; dotychczas nie została obalona. Przeciwnie, potwierdziły ją specjalnie przeprowadzone doświadczenia, np. w dziedzinie fizyki cząstek elementarnych i jądra atomowego, a także w astronomii. Okazało się, że dla tych dziedzin geometria Euklidesa nie jest „dobrym" modelem przestrzeni fizycznej. Warto zwrócić uwagę, na to, że w opisie zjawisk fizyki klasycznej, np. w dynamice lub kinetyce ciała stałego fizyka Einsteina nie różni się od fizyki Newtona. Dlatego też geometria Euklidesa była „dobra" dla tej fizyki.
Konieczność idealizacji i uproszczeń występuje także w procesie tworzenia znacznie bardziej szczegółowych modeli matematycznych dla konkretnych zagadnień technicznych lub ekonomicznych i podobne powstają tu niebezpieczeństwa. Mówił o tym prof. dr Andrzej Wierzbicki w wykładzie inauguracyjnym w Politechnice Warszawskiej 1X1976 r. w następujących słowach: „Użytkowy model matematyczny dla danego problemu jest często z natury rzeczy niedokładny i wymaga weryfikacji w oparciu o dane pomiarowe. Bez praktycznej weryfikacji, teoretyczne modele pozostają pustą abstrakcją, która nie może być wykorzystana dla pożytku społeczeństwa". I dalej: „Sztuka tworzenia dobrego modelu użytkowego wymaga dużego doświadczenia i intuicji technicznej w rozwiązywaniu zadań określonego typu". Posiadanie dobrego modelu matematycznego umożliwia optymalne rozwiązanie problemu praktycznego. Oto klasyczny już przykład — *zagadnienie transportowe*: w kraju jest czynnych n elektrowni zużywających odpowiednio $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ton węgla dziennie. Węgiel ma być dostarczony z krajowych kopalni, których jest m i każda produkuje dziennie co najmniej odpowiednio $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ton węgla. Znany jest koszt c_{ij} transportu 1 tony węgla z i-tej kopalni do j-tej elektrowni ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Tak należy zorganizować transport węgla, aby całkowity koszt transportu był najmniejszy. Jest to więc zagadnienie decyzji optymalnej. Należy określić taką liczbę x_{ij} ton węgla, który ma być przewieziony z i-tej kopalni do j-tej elektrowni, aby całkowity koszt transportu

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

był najmniejszy. Przy tym nałożone są ograniczenia

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant b_i \tag{2}$$

z uwagi na dzienną wydajność i-tej kopalni ($i = 1, 2, \ldots, m$) oraz wymagania

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j \tag{3}$$

z uwagi na zapotrzebowanie j-tej elektrowni ($j = 1, \ldots, n$).

Ponadto ma być

(4) $$x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$$

Ufamy, że Czytelnik nie dał się zwieść pozorną realnością opisanej wyżej sytuacji: mamy tu do czynienia nie z sytuacją rzeczywistą a jedynie z jej matematycznym modelem. Oczywiście nie tylko dlatego, że użyliśmy symboli literowych, tzn. że rozważamy to zagadnienie ogólnie, ale — co jest znacznie ważniejsze — dlatego, że dokonaliśmy dość poważnych uproszczeń. Zwróćmy uwagę chociażby na jedno: jako kryterium decyzji optymalnej przyjęliśmy koszt transportu. Zadanie rozwiązaliśmy. Czy rzeczywiście wydamy polecenie zgodne z tym rozwiązaniem? A może się np. okaże, że linia kolejowa z j-tej kopalni do i-tej elektrowni jest tak obciążona transportem rudy do Huty Katowice, że transport takiej dużej ilości x_{ij} węgla, jaka wypadła z naszego rozwiązania nie jest już tą linią możliwy. Inne trudności może nam np. stworzyć nagła zmiana pogody w pewnych rejonach kraju itd. Znów więc matematyczny model opisujący bardzo dobrze mały fragment rzeczywistości — pomijający pewne jej aspekty — może się okazać nieprzydatnym, gdy te aspekty uwzględnimy.

Jeśli już uświadomiliśmy sobie jedynie modelowy charakter wyżej opisanego zadania transportowego, to zastanówmy się nad jego rozwiązaniem: być może zostanie ono jednak wykorzystane w praktyce. Rozwiązaniami dopuszczalnymi tego zadania nazywamy takie (skończone) ciągi liczb x_{ij}, gdzie $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, które spełniają ograniczenia (2), (3), (4). Takie ciągi można traktować jako wektory lub punkty przestrzeni wielowymiarowej. Okazało się przede wszystkim, że zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych jest wypukłym podzbiorem tej przestrzeni (jeśli $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $b = (b_1, \ldots, b_k)$ są różnymi punktami k-wymiarowej przestrzeni, to mówimy, że punkt $p = (p_1, \ldots, p_k)$ leży na odcinku ab wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $t \in \langle 0,1 \rangle$, że $p_i = a_i + t(b_i - a_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Podzbiór H tej przestrzeni nazywamy wypukłym, jeśli z każdą parą punktów a, b zawiera także odcinek ab). Okazało się także, że zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych jest figurą wypukłą ze skończoną liczbą wierzchołków. Na płaszczyźnie byłyby to więc wielokąty wypukłe, w przestrzeni trójwymiarowej — wielościany wypukłe (ew. zbiory nieograniczone). Pominiemy tu definicję wierzchołka zbioru wypukłego w dowolnej przestrzeni wielowymiarowej. Rozwiązaniami optymalnymi nazwiemy te spośród dopuszczalnych, które minimalizują funkcję kosztów (1). Zwykle jest ich wiele, tworzą jednakże zbiór wypukły ze skończoną liczbą wierzchołków a wierzchołki te są także wierzchołkami zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Te fakty czysto geometrycznej natury, owoc rozumowania dedukcyjnego, pozwoliły znaleźć algorytm prowadzący od jednego wierzchołka zbioru rozwiązań dopuszczalnych do innego w taki sposób, aby koszt transportu (1) nie powiększał się. Znalezienie pierwszego wierzchołka jest bardzo łatwe. Potem stosując wspomniany algorytm skończoną liczbę razy znajdujemy wszystkie wierzchołki zbioru rozwiązań optymalnych. Potrzebne rachunki są wykonalne na maszynie cyfrowej nawet wtedy, gdy $m+n$ jest liczbą trzycyfrową.

Zadanie transportowe jest typowym zagadnieniem z działu matematyki, który wyrósł w ciągu ostatnich trzydziestu kilku lat z pytań stawianych w ekonomii i nazywa się programowaniem liniowym. Główne twierdzenia programowania liniowego — także te, które zostały tu sformułowane — otrzymano wykorzystując pojęcia geometrii analitycznej i przestrzeni wielowymiarowej oraz pojęcia algebry liniowej. Tak więc jeszcze jedno uogólnienie geometrii Euklidesa — tym razem nie przez odrzucenie jednego z postulatów lecz przez powiększenie liczby wymiarów — które mogłoby się wydawać pustą jedynie zabawą umysłu, nagle znalazło bardzo piękne i praktyczne zastosowanie. Zauważmy jednak, że gdybyśmy nie mieli do dyspozycji szybkoliczących maszyn, to te zastosowania pozostałyby jedynie w sferze pięknych możliwości: liczba operacji arytmetycznych rośnie bowiem bardzo szybko, gdy rośnie $m+n$.

Zagadnienia optymalnego projektowania urządzeń technicznych nie będą już na ogół tak proste jak zadanie transportowe. Zarówno wymagania nałożone na parametry konstrukcji technicznej (waga, wymiary, wytrzymałość, odporność na czynniki atmosferyczne, czułość, dokładność itp.) jak i kryterium decyzji optymalnej (koszt w zadaniu transportowym) mogą nie mieć postaci liniowej nawet przy znacznych, ale dopuszczalnych uproszczeniach. Jednakże tylko przez znalezienie odpowiedniego modelu matematycznego można tego rodzaju zagadnienia rozwiązywać. Metodą prób i błędów otrzymuje się rozwiązania zwykle dalekie od optymalnego, ponieważ możliwych decyzji jest na ogół nieskończenie wiele.

Rozwiązanie zadania M 165.

Przypuśćmy, że $e = \frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami naturalnymi. Byłoby więc

$$(q-1)!p = q!e = q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$$

Suma występująca w nawiasie jest liczbą wymierną o mianowniku $q!$, a więc po pomnożeniu jej przez $q!$ otrzymamy liczbę naturalną. Liczba

$$A = (q-1)!\ p - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right)$$

jest więc liczbą całkowitą (jako różnica dwóch liczb naturalnych).
Z drugiej strony

$$A = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots,$$

a więc

$$0 < A < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1,$$

czyli $0 < A < 1$, co jest sprzeczne z poprzednim stwierdzeniem, że A jest liczbą całkowitą. Tak więc założenie, że e jest liczbą wymierną doprowadziło nas do sprzeczności.

W związku z podobnymi zagadnieniami technicznymi rozwinęły się w ciągu ostatnich dwudziestu lat dwa duże działy matematyki: programowanie dynamiczne i teoria optymalizacji. Są one zbyt skomplikowane, aby w krótkim artykule można było je bliżej omówić.

Zamiast tego podkreślamy, że chociaż rozwiązywanie konkretnych zagadnień technicznych czy ekonomicznych ma ogromne znaczenie dla gospodarki narodowej dla jej doraźnych potrzeb, to jednak niemniej ważnym (dla tej samej gospodarki ale w długim okresie czasu) zastosowaniem matematyki w naukach ścisłych jest właśnie nadawanie ich problemom ścisłego charakteru, tzn. porządkowanie wiedzy o określonym fragmencie rzeczywistości przez tworzenie teorii (np. teoria względności). Tworzenie ścisłych teorii przez wykorzystanie odpowiednich modeli matematycznych pozwala także na odkrywanie nowych faktów naukowych bez pomiarów, eksperymentów i obserwacji — w drodze rozumowania dedukcyjnego. Eksperymenty nabierają wówczas nowego sensu. Mogą być odpowiednio projektowane w celu potwierdzenia poprawności modelu i słuszności odkryć teoretycznych. W taki sposób — najpierw teoretycznie a dopiero potem poprzez przyrządy optyczne — odkryto istnienie planet Neptuna i Plutona i obliczono ich orbity. Plutona dostrzeżono dopiero w 15 lat (w 1930 r.) po teoretycznym stwierdzeniu jego istnienia i położenia w kosmosie. Istnienie elektronów dodatnich zostało udowodnione przez Diraca w 1930 roku w wyniku rozważań teoretycznych na gruncie pewnego modelu matematycznego. Odkrycie to zostało w dwa lata później potwierdzone eksperymentalnie przez Andersona. Eksperyment był specjalnie zaprojektowany — nastawiony na „wyłapanie" dodatnich elektronów z promieni kosmicznych. Zapewne nie doszłoby do tego eksperymentu, gdyby nie teoretyczne odkrycie Diraca.

Próbowaliśmy w tym artykule pokazać sprzężenie zwrotne pomiędzy matematyką i naukami empirycznymi. Nauki te wykorzystują matematykę do uściślenia swoich pojęć, do poprawnego planowania eksperymentów, do rozwiązywania problemów przez tworzenie odpowiednich modeli matematycznych. Matematyka zaś otrzymuje w zamian pakiety nowych zagadnień, nowych pytań, z których powstają nawet nowe teorie matematyczne, które z kolei służą naukom empirycznym.

Kącik filatelistyczny (4)

Evangelista Torricelli (1608—1647) był najznakomitszym spośród uczniów Galileusza. Kontynuował jego badania w zakresie mechaniki, ale największą sławę przyniosły mu doświadczenia w zakresie hydrostatyki i hydrodynamiki. Wynalazł barometr rtęciowy (tzw. rurka Torricellego), wykazał istnienie ciśnienia atmosferycznego, oszacował ciężar atmosfery ziemskiej, odkrył prawo wypływu cieczy z naczynia.
Reprodukujemy dwa znaczki z portretem uczonego, wydane przez Włochy (w roku 1958) i przez ZSRR (w roku 1959).

Jerzy BARTKE