Czytelnicy proponują

Kol. Robert Kowal zaproponował, by zamieścić w naszym dziale zadaniowym następujące zadanie:

Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to

(1) $a^4+b^4+c^4+a^2bc+ab^2c+abc^2 \geqslant 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$.

Podał on dowód oparty na nierówności

(2) $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$,

która jest prawdziwa dla wszelkich dodatnich liczb a, b, c (nierówność ta, przy założeniu, że a, b, c są długościami boków trójkąta, stanowiła treść jednego z zadań VI Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej). Nierówność (1) otrzymuje się z nierówności (2) mnożąc obydwie jej strony przez $a+b+c$.

Zauważmy, że nierówność (1) wynika z nierówności 1.31 z książki D. S. Mitrinovicia, *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972: *dla wszystkich liczb rzeczywistych* a, b, c *jest*:

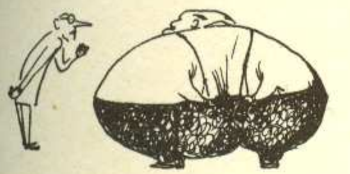
(3) $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geqslant a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)$.

Mamy bowiem dla liczb dodatnich a, b, c nierówność

$$ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2 \geqslant 0,$$

czyli

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b) \geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$



Nie wydaje mi się, abyś miał wiele stopni swobody!

Niestety, dowód nierówności (3), do którego odsyła autor książki, jest błędny (a raczej nie ma go wcale).

Nierówność (3) dla liczb dodatnich a, b, c jest przypadkiem szczególnym ($\lambda = 2$) omawianej w cytowanej książce nierówności Schura

$$a^\lambda(a-b)(a-c)+b^\lambda(b-a)(b-c)+c^\lambda(c-a)(c-b) \geqslant 0,$$

udowodnionej tam, niestety, w dość skomplikowany sposób. Pokazaliśmy powyżej inną metodę rozwiązania zadania zaproponowanego przez kol. Roberta Kowala.

Nierówność Schura dla $\lambda = 2$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b, c (co wynika z jej dowodu, podanego w książce Mitrinovicia), a więc nierówność 1.31 jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b, c.

Kącik filatelistyczny (3)

Galileo Galilei zwany w Polsce *Galileuszem* (1564—1642), włoski fizyk, astronom i filozof, uważany jest za twórcę mechaniki klasycznej. Odkrył on prawo ruchu wahadła, prawo swobodnego spadania ciał, sformułował zasadę względności w mechanice, wprowadził podstawowy dla mechaniki klasycznej związek między współrzędnymi czasowo-przestrzennymi dowolnego zdarzenia rozpatrywanego w dwóch różnych układach odniesienia (tzw. transformacja Galileusza). Skonstruował także lunetę astronomiczną. Reprodukujemy trzy znaczki pocztowe poświęcone temu wielkiemu uczonemu: dwa włoskie (z lat 1942 i 1964) oraz paragwajski z roku 1965. Podobiznę Galileusza znaleźliśmy też na znaczkach Czechosłowacji (z roku 1964), Meksyku (1971), Panamy (1965), Rumunii (1964), Włoch (1933 i 1945, poza reprodukowanymi) oraz Węgier (1964) i Związku Radzieckiego (1964).

Jerzy BARTKE