Dlaczego interesuje nas krzywa trójkątowa Sierpińskiego?

Krzywa trójkątowa Sierpińskiego to zbiór punktów płaszczyzny leżących w przekroju ciągu zstępującego figur $T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots$, z których T_0 jest trójkątem równobocznym, T_1 powstaje z T_0 przez usunięcie wnętrza środkowego trójkąta spośród czterech, równych, na które wcześniej podzielimy trójkąt T_0, a T_2 powstaje z T_1 przez dokonanie na każdym z trzech składających się na figurę T_1 trójkątów operacji dopiero co opisanej; podobnie dostaje się dalsze figury ciągu (rys. 1).
Figury T_k są spójne, domknięte i ograniczone; są więc kontinuami, według powszechnie przyjętej terminologii. Przekrój ciągu zstępującego kontinuów jest również kontinuum. Jest to już twierdzenie, ale z rodzaju tych, które głoszą, że jest tak jak się nam wydaje; zostawmy je więc bez dowodu, tym bardziej, że nie daliśmy ani określenia spójności, ani domkniętości, mając na myśli, że każde z grubsza dobre wyobrażenie o tych pojęciach wystarczy do śledzenia tego tekstu.
Przekrój T figur T_k nie zawiera żadnego (pełnego) krążka: średnica największego krążka zawartego w figurze T_k jest nie większa niż $(1/3)^k$ średnicy trójkąta T_0. Jest to jeden z powodów, dla którego mówimy o T, że jest krzywą.

*

Opisana konstrukcja pochodzi z pracy Wacława Sierpińskiego, „*O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia*", Prace Matematyczno-Fizyczne 27 (1916), str. 77—86.
Przez krzywą rozumie się zbiór na płaszczyźnie, który jest (1) kontinuum nie zawierającym żadnego (pełnego) krążka i który jest (2) obrazem ciągłym odcinka (z końcami), a więc jest zbiorem opisanym równaniami, w których występują funkcje ciągłe.
W czasach, z których pochodzi praca Sierpińskiego, zbiory na płaszczyźnie mające własność (1) nazywano krzywymi w sensie Cantora; te, które mają własność (2), nazywano krzywymi w sensie Jordana, co prawda już raczej dla tradycji, bo wiadomo było od dawna (Peano 1890), że kwadrat jest krzywą w tym sensie. Tytuł pracy wskazywał, dlaczego budowana w niej krzywa miała zasługiwać na uwagę.
Abyśmy jednak mogli z własnego przekonania uznać rzecz za ciekawą, powinniśmy najpierw wiedzieć, co to jest punkt rozgałęzienia.

*

Opiszemy to pojęcie, tak jak to robił Urysohn mniej więcej dziesięć lat później (P.S. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes* II, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen 13 (1928), str. 1—172).
Punkt p jest punktem (rozgałęzienia) rzędu $\leqslant n$ zbioru A, jeśli istnieją dowolnie małe otoczenia punktu p, których brzeg ma nie więcej niż n punktów; najmniejszą z takich liczb n nazywamy rzędem (rozgałęzienia) zbioru A w punkcie p; jeśli ten rząd jest 3 lub większy, to punkt nazywany jest wprost punktem rozgałęzienia. Chociaż można, nie myślmy o rzędach rozgałęzienia nieskończonych.
Wszystkie punkty odcinka są rzędu 2 lub 1 (rzędu 1 są tylko końce); wszystkie punkty okręgu są rzędu 2. Najprostszą figurą mającą (jeden) punkt rozgałęzienia jest trójnóg (litera Y). Jeśli z punktu wychodzi n łuków, z których żadne dwa nie mają poza tym punktem punktów wspólnych, to punkt ten jest rzędu co najmniej n. Z punktu rzędu n nie może wychodzić więcej niż n takich łuków.
Na krzywej T widać po cztery odcinki wychodzące z punktów będących wspólnymi wierzchołkami trójkątów z figur T_k (rys. 2). Są to punkty rzędu 4, bo są dowolnie małe otoczenia tych punktów o brzegach (na rysunku symbolizują je okręgi rysowane linią przerywaną) mających po cztery punkty.
Obwody trójkątów z figur T_k są zawarte w krzywej T. Punkty z tych obwodów nie będące wierzchołkami trójkątów z żadnej z tych figur są rzędu 3. Dwa odcinki wychodzące z takiego punktu widać; widać także trzeci łuk wychodzący z takiego punktu i tworzący z tymi dwoma odcinkami trójnóg; widać dowolnie małe otoczenia o brzegach mających po trzy punkty (rys. 3).
Są punkty krzywej T nie leżące na żadnym z obwodów trójkątów z figur T_k. Czy są? Zamiast odpowiadać na kłopotliwe pytania (chyba niepotrzebne, skoro nie stawialiśmy podobnego pytania z okazji poprzednio rozpatrywanych punktów), pokażmy, na wypadek gdyby takie punkty istniały, że są one rzędu 3. Widać to z rysunku 4, robionego według tego samego schematu co poprzednie dwa.
Ale są trzy punkty krzywej T, wierzchołki trójkąta T_0 (i to jest już reszta), które są rzędu 2. Są dwa odcinki wychodzące z takiego punktu i są dowolnie małe otoczenia ich, których brzegi mają po dwa punkty (rys. 5).
Biorąc dwa egzemplarze krzywej T i sklejając w nich po dwa wierzchołki w trójkątach T_0 dostajemy krzywą mającą same punkty rozgałęzienia; rzędy tych punktów są 3 lub 4; punktów rzędu 4 jest tylko przeliczalnie wiele. Czy istnieje krzywa, której wszystkie punkty są rzędu 3?

Prof. dr
Jerzy MIODUSZEWSKI

Że takiej krzywej nie ma, pokazał później Urysohn we wspomnianej już pracy: nie ma krzywych mających ten sam (skończony) rząd rozgałęzienia w każdym punkcie, chyba że ten rząd jest 2.
Dokładniej: jeśli krzywa (której każdy punkt jest rzędu skończonego) ma w każdym punkcie rząd $\geqslant n$, to są punkty tej krzywej, w których rząd jest $\geqslant 2n-2$. Dla $n = 2$ dostajemy znowu liczbę 2, a dla $n = 3$ liczbę 4. Krzywa trójkątowa Sierpińskiego daje przykład na to, że twierdzenia Urysohna nie można wzmocnić.
Dowód twierdzenia Urysohna (uproszczony przez Parchomienkę w książce „*Co to jest linia?*”, tłumaczenie z rosyjskiego, Warszawa 1961). Przypuśćmy, że wszystkie punkty krzywej (są rzędu skończonego i) są rzędu $< 2n-2$. Wtedy
(*) każdy zbiór otwarty niepusty U zawiera wraz z brzegiem zbiór otwarty niepusty o brzegu mającym nie więcej niż $n-1$ punktów.
Mając tę przesłankę kończymy dowód, budując ciąg zstępujący zbiorów otwartych niepustych o średnicach dążących do zera (rys. 6), takich, że następny jest zawarty z brzegiem w poprzednim i te brzegi mają nie więcej niż $n-1$ punktów. Punkt wspólny tych zbiorów jest rzędu $\leqslant n-1$; sprzeczność.
Dowód przesłanki (*). Niech $p \in U$. Ponieważ punkty krzywej są wszystkie rzędu skończonego, więc istnieje otoczenie W punktu p o brzegu skończonym i zawarte w U wraz z tym brzegiem. Niech q będzie punktem na brzegu zbioru W (rys. 7). Istnieje otoczenie V' punktu q, zawarte wraz z brzegiem w U, nie zawierające innych niż q punktów brzegu zbioru W i którego brzeg ma mniej niż $2n-2$ punktów (założenie przesłanki (*)). Zbiór V' rozpada się po odjęciu punktu q na dwie części otwarte niepuste. Na brzegu obu tych części jest razem (nie licząc punktu q) mniej niż $2n-2$ punktów. Stąd, na brzegu jednej z nich jest (razem z punktem q) nie więcej niż $n-1$ punktów. Ta właśnie część jest szukanym zbiorem V.

*

Rozważmy w przestrzeni czworościan foremny. Podzielmy go na równe czworościany o średnicy dwa razy mniejszej i zostawmy tylko te przy wierzchołkach. Postępując tak dalej, dostaniemy jako pozostałość kontinuum, które we wszystkich punktach jest rzędu 4 i 6 z wyjątkiem wierzchołków wyjściowego czworościanu, które są rzędu 3. Jest to przestrzenny odpowiednik krzywej trójkątowej Sierpińskiego. Sklejając ze sobą po dwa punkty rzędu 3 dostaniemy kontinuum, którego wszystkie punkty są rzędu 4 i 6.
Pokazuje to niemożliwość wzmocnienia twierdzenia Urysohna także dla $n = 4$. Rzecz dzieje się w przestrzeni, więc kryterium (**1**) nie może być zastosowane, aby orzec, że dostaliśmy krzywą. Ale zobaczmy, że nie dostaliśmy ani bryły, ani powierzchni. W k-tym kroku konstrukcji mamy figurę, która jest sumą czworościanów o średnicy $(1/2)^k$ połączonych ze sobą wierzchołkami i figura ta rozpada się na te czworościany po usunięciu tych (skończenie wielu) wierzchołków. Figura ta nie może więc zawierać żadnej bryły ani powierzchni (w jakimkolwiek możliwym do przyjęcia znaczeniu) o średnicy większej niż $(1/2)^k$. Stąd, przekrój tych figur nie może zawierać żadnej bryły ani powierzchni. To samo można zrobić dla każdego n, w $n-1$ wymiarach, i dostać krzywe (dopuśćmy to słowo), których wszystkie punkty są rzędu n i $2n-2$.

*

Pozostało do pokazania, że krzywa trójkątowa T jest obrazem ciągłym odcinka. Dowód, który podaje Sierpiński, sparafrazujemy w sposób znany z poprzedniego artykułu w Delcie 7/1977.
Rozetnijmy figurę T_1 w jednym z punktów wierzchołkowych nie będącym wierzchołkiem trójkąta T_0. Powstaje girlanda złożona z trzech trójkątów (rys. 8). Każdy z tych trzech trójkątów rozetnijmy podobnie, ale tak, by powstała girlanda 9 trójkątów; można to zrobić np. tak, jak na rysunku 9.
Potem z tych trójkątów dostaniemy girlandę złożoną z 27 trójkątów; przy rozcinaniu trójkątów można trzymać się takiej reguły: trójkąty przecinamy na bokach mających punkty wspólne z trójkątami sąsiednimi; jedynie w przypadku skrajnych trójkątów reguła ta nie jest jednoznaczna.
Postępując tak dalej, dostajemy w granicy (jakiej i jakim prawem?) łuk, który po sklejeniu go z powrotem daje znów krzywą trójkątową. Nie sklejamy przy tym więcej niż po dwa punkty. Krzywa trójkątowa jest więc obrazem ciągłym łuku, a więc i odcinka, otrzymanym przez odwzorowanie o krotności nie większej niż 2.

Rozwiązanie zadania M 162
Niech $ABCD$ będzie szukanym czworościanem. Gdy przez każdą krawędź poprowadzimy płaszczyznę równoległą do krawędzi przeciwległej, otrzymamy sześć płaszczyzn ograniczających równoległościan, którego pewnymi wierzchołkami są punkty A, B, C, D, końce zaś danych odcinków są środkami jego ścian.
Zauważmy, że każda para przeciwległych krawędzi równoległościanu jest równoległa do płaszczyzny zawierającej dwa dane odcinki, gdyż prosta łącząca środki przeciwległych ścian równoległościanu jest równoległa do każdej innej ściany tego równoległościanu.
Czworościan spełniający warunki podane w zadaniu można wskazać w następujący sposób: przez końce każdego danego odcinka prowadzimy płaszczyzny równoległe do pozostałych dwóch odcinków. Otrzymujemy w ten sposób równoległościan. Na dwóch przeciwległych jego ścianach obierzmy dwie nierównoległe przekątne. Ich końce są wierzchołkami żądanego czworościanu. Zadanie ma więc (co najmniej) dwa rozwiązania.

Rozwiązanie zadania F 54

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że zderzenie nie jest sprężyste, gdyż po takim zderzeniu kulki 2 i 3 powinny być nieruchome, a kulka 1 powinna poruszać się z prędkością 7 cm/s. Nie zawsze jest to jednak prawdą, a jedynie wtedy, gdy całe zderzenie można uważać za dwa oddzielne, kolejno zachodzące sprężyste zderzenia „dwukulkowe". Taka sytuacja zdarza się często, ale zależy to od czasu trwania pojedynczych zderzeń. W przypadku ogólnym jako kryterium sprężystości pozostają jedynie zasady zachowania pędu i energii kinetycznej. W rozważanej sytuacji mają one postać:

$$mv = mv_1 + mv_2 + mv_3,$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2}$$

i stanowią układ tylko dwóch równań z trzema niewiadomymi. Tak więc w ogólności stan końcowy zderzenia z udziałem więcej niż dwóch kulek nie daje się jednoznacznie przewidzieć. Podane zaś w treści zadania prędkości kulek spełniają oba powyższe równania. Rozpraszanie jest więc sprężyste.

*

Jeśli w krzywej trójkątowej zaszyjemy dziury, to dostaniemy pełny trójkąt. To brzmi nawet prawdopodobnie, ale nie każde zszywanie jest dobre. Opiszemy zaszywanie trójkąta usuniętego w pierwszym kroku konstrukcji. Wystarczyłoby opisać zszywanie obwodu, ale opiszemy zaszywanie całego trójkąta.

Dzielimy trójkąt na cztery równe trójkąty (rys. 10). Środkowy trójkąt redukujemy do punktu. W pozostałych trzech redukujemy do punktów odcinki równoległe do boków środkowego trójkąta. Wierzchołki trójkąta nie zostały zszyte z innymi punktami. Jeśli zaszyjemy w ten sposób wszystkie pousuwane trójkąty, to postąpimy tak, jak byśmy odwzorowali w sposób ciągły (nie tylko to przyjmiemy teraz na słowo) trójkąt T_0 na figurę powstałą z niego przez zredukowanie do punktów wszystkich trójkątów i odcinków, na które zostały porozbijane pousuwane trójkąty. Zauważmy, że punkty na obwodzie trójkąta T_0 nie zostały zszyte z żadnymi innymi, a żaden ze wspomnianych trójkątów i odcinków nie rozspaja trójkąta T_0.

Jedno z ciekawszych twierdzeń topologii płaszczyzny, twierdzenie Moore'a (w pełnej ogólności i z odnośnikiem do oryginalnej pracy Moore'a z r. 1920 można znaleźć w książce Kuratowskiego, *Topology II*, Warszawa 1968, str. 533), pozwala na konkluzję, że powstałą figurą jest zbiór homeomorficzny z (pełnym) krążkiem, a więc także i z trójkątem T_0.

W prawdziwość konkluzji łatwo się wierzy, czując w palcach rezultat zszywania trójkąta T_0. Oczywistość twierdzenia Moore'a jest jednak zdradliwa: trójwymiarowy analogon, że zlepianiem w punkty łuków nie rozspajających (pełnej) kuli, jest fałszywy. Otrzymany przez zszywanie krążek jest obrazem także krzywej T, bo elementy rozbicia mają punkty na krzywej T, a że każdy ma ich nie więcej niż trzy, więc krążek jest obrazem (ciągłym) krzywej trójkątowej przez odwzorowanie krotności nie większej niż 3.

Autor artykułu nie wie, czy krzywą trójkątową można odwzorować w sposób ciągły na krążek przez odwzorowanie krotności nie większej niż 2.

Spójrzmy, jak wygląda krzywa T po zszyciu (rys. 12). Usunięte trójkąty stały się trójnogami o średnicach dążących do zera wraz ze średnicami odpowiadających im trójkątów.

Punkty rozgałęzienia trójnogów, to środkowe części usuwanych trójkątów.

*

Przez złożenie opisanych odwzorowań, odcinka na krzywą T i krzywej T na krążek, dostajemy odwzorowanie (ciągłe) odcinka na krążek.

Co do krotności jest nieco gorsze niż oryginalne odwzorowanie Peany, które ma krotności 1, 2 i 4 (o odwzorowaniach Peany — zob. artykuł w Delcie 7/1977). To, które dostaliśmy, ma wszystkie krotności od 1 do 4.

Zobaczymy to. Punkty krzywej T leżące na obwodach usuwanych trójkątów są wartościami krotności 1 lub 2 odwzorowania odcinka na krzywą T i tylko one są zszywane; wartości krotności 2 jest jedynie przeliczalnie wiele: są to punkty, w których robiliśmy rozcięcia. Zszywamy końce odcinków rozbicia (rys. 11) i wtedy zszywamy dwie wartości krotności nie większej niż 2, ale zdarza się przy tym zszyć punkt krotności 2 z punktem krotności 1 (punkty p i q z rys. 11), otrzymując wartość krotności 3 odwzorowania złożonego.

Zszycie wierzchołków trójkąta redukowanego do punktu daje punkt krotności 4 odwzorowania złożonego, bo (trzeba to zauważyć) zszywa się wtedy jeden punkt krotności 2 z dwoma punktami krotności 1. Odwzorowanie złożone ma jeszcze krotności 2 i 1, ale i tak pokazaliśmy już, że otrzymaliśmy odwzorowanie nie lepsze niż Peany, więc oszczędźmy sobie dowodu, w którego wyniku nie jesteśmy zainteresowani.

Pokażemy za to jak, zmieniając nieco sposób zaszywania usuniętych trójkątów, dostać odwzorowanie (ciągłe) odcinka na krążek, mające krotności 1, 2 i 3, z przeliczalną ilością punktów krotności 3, więc nie gorsze niż odwzorowanie Pólyi (przypomniane w Delcie 7/1977). Obniżenie krotności, podobnie jak u Pólyi, będzie otrzymane kosztem symetrii.

Każdy z usuniętych trójkątów dzielimy na cztery trójkąty przez wpisanie trójkąta tak, aby jego wierzchołki były krotności 1, a odcinki równoległe do jego boków (rys. 13) nie łączyły punktów krotności 2 z punktami krotności 2 z obwodu usuniętego trójkąta. Trójkąt tak wpisany się znajdzie, bo punktów krotności 2 jest jedynie przeliczalnie wiele (jest to wskazówka do dowodu, którego dobre wykonanie może dać nawet pewną satysfakcję). Zszywanie robimy jak poprzednio. Otrzymujemy krążek, który jest teraz obrazem odcinka przez odwzorowanie krotności nie większej niż 3 (rys. 14).