Program Hilberta

Doc. dr Leszek PACHOLSKI

Redakcja Delty zwróciła się do mnie z propozycją napisania artykułu o programie Hilberta. Długo zastanawiałem się, jak temat ten można spopularyzować, a im dłużej myślałem, tym bardziej byłem przekonany, że jest to bardzo trudne. Pisanie o podstawach matematyki, a o programie Hilberta w szczególności, oznacza konieczność wejścia na grząski teren pogranicza filozofii i matematyki, gdzie do tej pory jest wiele spraw spornych i nie wyjaśnionych. Tu nie można posłużyć się ilustracją ani przybliżeniem, nie można zaniedbać szczegółów, a przy tym ważne i ciekawe są nie same twierdzenia lecz wnioski, do których prowadzą, a których interpretacja do tej pory budzi kontrowersje. Ileż uroczych metafizycznych nonsensów zawierają artykuły popularyzujące wnioski z twierdzenia Gödla!
Jedynym wyjściem jest w tej sytuacji ucieczka w historię. Zresztą dla zrozumienia źródeł programu Hilberta konieczna jest znajomość pewnych faktów z historii rozwoju pojęć i kryteriów ścisłości w rachunku różniczkowym, geometrii i teorii zbiorów. Program Hilberta wyrósł bowiem z entuzjazmu dla formalizacji. Początek XX wieku był okresem, kiedy po dwóch wiekach braku ścisłości w matematyce udało się stworzyć takie metody, że nie tylko z powrotem osiągnięto rygory ścisłości „Elementów" Euklidesa, ale nawet znacznie je przekroczono.
Gdy na przełomie XVII i XVIII wieku I. Newton oraz G. W. Leibniz stworzyli początki rachunku różniczkowego, matematycy z entuzjazmem zaczęli stosować nowo wprowadzone metody. Rachunek różniczkowy rozwijał się bardzo gwałtownie. Z jego pomocą opisano wiele zjawisk fizycznych i rozwiązano wiele ważnych zagadnień. Osiągnięto bardzo dużo, ale metody, których używano, dalekie były od ścisłości. Wyprowadzano nieprawdziwe wzory, a prawdziwe często uzasadniano nieprecyzyjnie i niedostatecznie. Entuzjazm dla nowych metod był jednak tak wielki a ich skuteczność tak ogromna, że niemal wszyscy matematycy uważali, iż uzasadnianie metod rachunku różniczkowego i uściślanie go jest zbędne. Dla Leibniza rachunek różniczkowy był zbiorem reguł algorytmicznych, które można powszechnie stosować, a których najlepszym uzasadnieniem jest ich skuteczność. Zresztą trzeba przyznać, że entuzjazm i beztroska były zrozumiałe, osiągnięcia były bowiem ogromne. Niemal wszystko, czego do dziś uczą się studenci w czasie tradycyjnego kursu analizy i wiele stosowanych obecnie metod rachunku różniczkowego i równań różniczkowych, powstało w tych czasach. Aż trudno dziś uwierzyć, że używając tak mało precyzyjnych i ścisłych metod można było osiągnąć tak wspaniałe rezultaty.

Pierwsze próby uzasadnienia rachunku różniczkowego były bardzo naiwne. Jedni szukali go w metafizyce, inni w tym, że błędów popełnia się tak wiele, iż w końcu się redukują. Wielu uczonych i filozofów uważało wręcz, że rachunek różniczkowy musi być mętny, jest on przecież sztuką dokładnego mierzenia i liczenia rzeczy, których pojąć nie można (Wolter). Niektórzy uważali brak ścisłości za zaletę, dumni z osiągniętego ich zdaniem sukcesu, który polegał na tym, że udało się zerwać narzucone przez matematykę grecką więzy ścisłości.
Za uzasadnienie wystarczała fizyczna motywacja i niejasna czasem intuicja. S. F. Lacroix pisał: „takim subtelnym mięczakom jak Grecy potrzebne były dowody, my ich już nie potrzebujemy".
W końcu XVIII wieku pojawiły się pierwsze uściślenia pojęć rachunku różniczkowego. J. d'Alembert zauważył, że różniczkowanie to znajdowanie granicy różnic skończonych, on też, mimo iż w swoich rozumowaniach często posługiwał się intuicją geometryczną, podkreślał, że ścisłości należy szukać w arytmetyce. J. L. Lagrange twierdził, że pochodna jest konkretną wielkością, podczas gdy wcześniej uważano ją za coś nieokreślonego i mglistego. Dużym krokiem na drodze do uściślenia pojęcia pochodnej były prace B. Bolzano, który uważał, że rachunek różniczkowy należy sprowadzić do działań arytmetycznych. Konsekwentnie stosował pojęcie granicy w definicji ciągłości i pochodnej. On też po raz pierwszy pokazał niezgodność intuicji z własnościami badanych pojęć. Zbudował bowiem przykład funkcji ciągłej, która nigdzie nie jest różniczkowalna, wbrew panującym przekonaniom, że wszystkie funkcje ciągłe są różniczkowalne. Ponieważ pojęcia ciągłości i pochodnej zostały przez Bolzano zredukowane do pojęcia granicy, to ostatnie pilnie wymagało uściślenia. Uściślenia wymagało też pojęcie liczby rzeczywistej, czy, jak dawniej mówiono, zmiennej. Prace A. Cauchy'ego i K. Weierstrassa doprowadziły wreszcie do zdefiniowania pojęcia granicy, które nie różni się niczym od definicji przyjmowanej dziś. Cauchy podjął również próbę zdefiniowania liczby rzeczywistej. Niestety jego definicja zawierała błędne koło. Liczbę rzeczywistą definiował on jako granicę ciągów liczb wymiernych, ale w definicji granicy używał pojęcia liczby rzeczywistej. Inną propozycję przedstawił W. R. Hamilton, który oparł swą teorię na pojęciu czasu. Liczby rzeczywiste były dla niego punktami dzielącymi czas na przeszłość i przyszłość i były wyznaczone przez dwa zbiory liczb wymiernych — zbiór liczb wymiernych w przeszłości i zbiór liczb wymiernych w przyszłości. Niemal identyczna była definicja R. Dedekinda, który jednak nie używał pojęcia czasu.

Dyscypliną matematyki, której rozwój miał duży wpływ na poglądy o ścisłości i prawdzie w matematyce, była geometria. W geometrii od dawna ważną rolę odgrywała dedukcja, a ścisłość geometrii Euklidesa przez długie wieki była niedoścignionym ideałem. Jednak w końcu XIX wieku w dowodach Euklidesa zaczęto dostrzegać luki. Zauważono też, że definicje podstawowych pojęć były niepoprawne. Podawały one tylko mało precyzyjne intuicje. Punkt był bowiem czymś, co nie ma części, a przecież na to, aby ta definicja była poprawna, należałoby zdefiniować pojęcie części. Intuicja i rysunki, wbrew intencjom Euklidesa, były istotnymi składowymi dowodów twierdzeń, które podawał. Wiele z nich nie wynikało z podawanych aksjomatów. W 1882 roku M. Pasch opublikował pracę, w której przedstawił udoskonalony system aksjomatów geometrii. W systemie tym występowały pojęcia niezdefiniowane, a istotne własności tych pojęć i ich wzajemne związki były opisane przez aksjomaty.

W starożytności i jeszcze długo potem geometria była nauką o przestrzeni, którą uważano za dokładną idealizację przestrzeni fizycznej. Odkrycie geometrii nieeuklidesowych spowodowało zachwianie tego poglądu. Wprawdzie dalej geometria Euklidesa była jedyną prawdziwą, a inne tylko sztuczkami polegającymi na wymyślaniu dziwnych sposobów mierzenia odległości, powoli jednak zaczynało pojawiać się przekonanie, że geometria jest tylko konstrukcją umysłu ludzkiego i nie musi być dokładnym odbiciem rzeczywistości. Do ugruntowania tego poglądu przyczyniły się badania nad geometriami przestrzeni wielowymiarowych. Geometrie takie rozważano już w pierwszej połowie XIX wieku. Początkowo traktowano je jak bezsensowną zabawę. Potem zaczęły pojawiać się coraz częściej, odgrywając przy tym ważną rolę jako narzędzie w analizie matematycznej. Użyteczność i powszechność ich stosowania sprawiły, że pod koniec wieku uważano geometrie przestrzeni dowolnych wymiarów za jednakowo ważne.

Pojęcia, które badała matematyka tradycyjna, miały oczywiste intuicje i wyrastały z obserwacji fizycznych i doświadczenia. Nawet nieskończenie małe Leibniza i fluksje Newtona nie były czystym dziełem rozumu, ale odpowiadały intuicjom prędkości ruchu i szybkości zmian. Nie było pojęć i konstrukcji sztucznych, wszystko miało odbicie w świecie. Stąd wiele faktów było oczywistych. Niepotrzebne było uzasadnienie, że teoria jest dobra lub zła. Wystarczała zgodność z rzeczywistością oraz intuicją. Matematycy nie obawiali się, że poprawne rozumowania mogą doprowadzić ich do wniosków fałszywych lub sprzecznych, bo przecież twierdzenia matematyki mówiły prawdę o świecie. Tradycje i intuicja były tym, na czym opierało się szereg pewników o bardzo ogólnym charakterze. Uważano, że nieskończone zbiory dyskretne (tzn. złożone z oddzielnych punktów) są niedopuszczalne, jak również niemożliwe jest nieskończone dzielenie prostej. Widziano zasadnicze różnice między zbiorami punktów (liczb) a linią. Między arytmetyką i geometrią.

Ale matematyka zmienia się bardzo szybko. Pojawiają się pojęcia i teorie, które nie są już dokładnym odbiciem rzeczywistości. Wspomniana wyżej definicja liczb rzeczywistych po ulepszeniu przez B. Russella mówi, że liczbą rzeczywistą są dwa zbiory liczb wymiernych. Definicja ta godzi ciągłe z dyskretnym, jest ścisła, ale jakże odległa od intuicji. Pojawiają się geometrie nieeuklidesowe i wielowymiarowe, a w analizie trudno się obejść bez zbiorów nieskończonych. Matematycy pracują nad stworzeniem abstrakcyjnej algebry, która coraz mniej jest oparta na arytmetyce, a częściej polega na badaniu abstrakcyjnych operacji na abstrakcyjnych obiektach. Matematyka oddala się od fizyki i intuicji. Powszechniejszy staje się pogląd, że pojęcia matematyki są tworem myśli nie skrępowanej doświadczeniem. Kryteria ścisłości często odwołują się do definicji formalnych, czasem sztucznych ale precyzyjnych. W dowodach intuicja zostaje zastąpiona przez logikę.

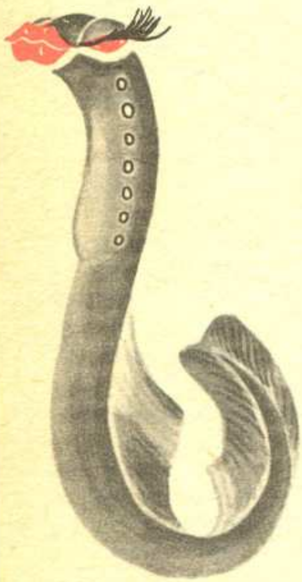
Nie wszyscy matematycy uważali, że zachodzące procesy w istotny sposób wpłynęły na zmianę istoty matematyki. Część z nich uważała, że ścisłość i rygor nie tworzą matematyki, lecz tylko pozwalają udowodnić to, co podpowiada intuicja, że nowe aksjomaty służą do dowodzenia starych twierdzeń. A jednak rygor i logika prowadzą do nowych twierdzeń, które nie tylko nie są uściśleniem intuicji, ale wręcz jej przeczą. Matematycy konstruują dziwne przykłady — funkcje ciągłe bez pochodnych, linie ciągłe wypełniające kwadrat. Okazuje się, że suma szeregu funkcji bardzo ciągłych i różniczkowalnych nie musi być ciągła. Wielu matematyków uważa te przykłady za patologiczne i protestuje przeciwko nowym pomysłom. H. Poincaré pisze: „Logika czasami tworzy monstra. Przez pół wieku oglądaliśmy mnóstwo dziwacznych funkcji, które zmusza się do tego, aby możliwie mało przypominały przyzwoite funkcje, które do czegoś służą [...]. Istotnie, z punktu widzenia logiki te dziwne funkcje są najbardziej ogólne, natomiast te, które spotykamy bez specjalnego szukania i które podlegają prostym prawom, okazują się szczególnym przypadkiem, nic nie znaczącym marginesem. W dawnych czasach wymyślano funkcje z powodów praktycznych, dziś wymyśla się je tylko po to, by ukazać defekty w rozumowaniach naszych poprzedników".

Niezależnie od poglądów wielu ówczesnych matematyków nowe metody i nowe kryteria ścisłości weszły do matematyki na stałe. Można było ignorować patologiczne konstrukcje i najbardziej abstrakcyjne działy matematyki, ale trzeba było pogodzić się z tym, że nawet w badaniach starych, dobrych zagadnień rygor i logika zajęły miejsce intuicji, że zmieniły się kryteria poprawności dowodów, że zmieniło się pojęcie prawdy w matematyce.

Na początku XX wieku rozwój pojęć matematyki osiągnął taki poziom, że w codziennej praktyce nie było już kłopotów ze ścisłością. Trudno było jednak uznać, że wszystkie pojęcia są jasne, że podstawy, na których opiera się matematyka, są bardzo solidne. Najwięcej kłopotów sprawiało pojęcie zbioru nieskończonego. Jego pojawienie się było nieuniknioną konsekwencją rozwoju analizy. Mimo to wielu uczonych uważało pojęcie zbioru nieskończonego za sprzeczne. Nie wierzono, że zbiory nieskończone mogą być używane i badane w matematyce. Ale nawet ci matematycy, którzy oficjalnie odrzucali to pojęcie, używali go w swoich pracach.

Początki teorii zbiorów związane są z nazwiskiem R. Dedekinda, który przy okazji wprowadzania definicji liczb rzeczywistych używał zbiorów nieskończonych i badał ich własności. Wyniki Dedekinda znacznie wzbogacił G. Cantor, który stworzył obszerną teorię zbiorów nieskończonych, liczb kardynalnych i porządkowych. Jednym z ważniejszych pojęć badanych przez Cantora było pojęcie równoliczności. Dwa zbiory A, B są równoliczne, jeśli mają tyle samo elementów, to znaczy jeśli każdemu elementowi zbioru A można przyporządkować element zbioru B, przy czym różnym elementom zbioru A należy przyporządkowywać różne elementy zbioru B, oraz elementy przyporządkowane elementom zbioru A powinny wyczerpać zbiór B. Jednym z ciekawszych odkryć Cantora było twierdzenie, że istnieją zbiory nieskończone nierównoliczne, innymi słowy, że nie wszystkie zbiory nieskończone mają taką samą ilość elementów (czyli moc). Nowe odkrycia często zaskakiwały matematyków. Nawet sam Cantor komentując jedno z nich pisał w liście do Dedekinda „widzę, ale nie wierzę". Zresztą teoria zbiorów nieskończonych spotkała się ze sprzeciwami wielu matematyków. Ataki na Cantora były tak ostre, że pod ich wpływem załamał się nerwowo i musiał na pewien czas przerwać pracę naukową.
Trzeba przyznać, że posługiwanie się pojęciem zbioru nieskończonego było niebezpieczne, a teoria Cantora tych niebezpieczeństw nie umiała uniknąć. Pojawiło się wiele antynomii (paradoksów) związanych z pojęciem zbioru nieskończonego i z pojęciem mocy. Dla ilustracji przytoczę tu jedną z bardziej znanych, pochodzącą od Russella. Niech X będzie zbiorem wszystkich zbiorów, które nie są swoimi elementami. Wtedy na pytanie, czy X jest swoim elementem ($X \in X$), nie można udzielić sensownej odpowiedzi. Bo jeśli $X \in X$, to X jest swoim elementem, a więc na mocy definicji $X \notin X$. Jeśli natomiast $X \notin X$, to X nie jest swoim elementem, przeto z definicji $X \in X$.

Antynomie zmusiły matematyków do szukania precyzyjniejszej teorii zbiorów od tej, którą podał Cantor. Dla niektórych uczonych było jasne, że rozwiązania należy szukać w aksjomatyzacji pojęcia zbioru. Jednym z najstarszych systemów aksjomatów opisujących pojęcie zbioru jest system E. Zermelo. Udoskonalony później przez A. Fraenkla jest stosowany do dziś i znany pod nazwą teorii mnogości ZF (Zermelo-Fraenkel). Metoda uniknięcia antynomii zaproponowana przez Zermelo polegała na tym, że nie postulował on, tak jak Cantor, że dowolna własność definiuje zbiór elementów, które mają tę własność. System Zermelo był stosunkowo prosty i użyteczny, ale nie było pewności, że system ten jest niesprzeczny, to znaczy, że ma realizację czyli model. Wprawdzie zwolennicy teorii Zermelo wierzyli w jej niesprzeczność, ale ich wiara opierała się tylko na tym, że znanych antynomii nie można było w tym systemie zbudować. Zresztą do dziś matematycy nie znaleźli żadnych paradoksów, które wskazywałyby na to, że aksjomaty Zermelo należy odrzucić. Wypada dodać, że były też inne propozycje uniknięcia paradoksów, bardziej nawet ambitne niż teoria Zermelo, gdyż usiłujące zbudować podstawy nie tylko dla teorii mnogości, lecz dla całej matematyki. Jedna z nich to teoria typów logicznych B. Russella, druga to intuicjonizm L. E. J. Brouwera. Przedstawione przez nich metody przezwyciężenia kryzysu podstaw matematyki miały wady. Brouwer proponował bowiem przebudowanie istniejącej matematyki i zrezygnowanie z dużej części aparatu dedukcyjnego, który od dwustu lat był stosowany przez matematyków. System Russella był natomiast skomplikowany i mało skuteczny, a poza tym w jego pracach było dużo filozofii, co bardzo odstraszało matematyków. Obie propozycje odegrały marginesową rolę w rozwoju matematyki, mimo iż wzbudziły dużo zainteresowania wśród filozofów i przyczyniły się do powstania dwóch szkół — intuicjonistycznej i logistycznej — w podstawach matematyki i filozofii matematyki. Większe znaczenie miała propozycja przedstawiona przez D. Hilberta, który rozwiązania szukał w aksjomatyzacji, przy czym duży nacisk kładł na dowody niesprzeczności. Oba te pomysły nie były nowe. Już wcześniej badane były teorie aksjomatyczne: geometria Euklidesa, geometrie nieeuklidesowe, teoria liczb naturalnych (zaksjomatyzowana przez G. Peano) i inne. Udowodniono też niesprzeczność geometrii nieeuklidesowych. Zdaniem Hilberta znane sposoby aksjomatyzacji teorii matematycznych były niewystarczające. Dotychczasowe systemy formalizowały bowiem tylko charakterystyczne pojęcia teorii, natomiast metody dowodzenia opierały się na intuicyjnej logice. W systemie aksjomatycznym Hilberta zaksjomatyzowane miały być nie tylko pojęcia teorii, ale także logika i metody dowodzenia. Oprócz aksjomatów teorii system formalny powinien zawierać aksjomaty logiki a także reguły dowodzenia. Aksjomatów logiki i teorii mnogości oraz reguł dowodzenia powinno być skończenie wiele lub powinny być opisane przez skończoną ilość schematów. W takim systemie dowodzenie polegałoby na mechanicznym stosowaniu podanych reguł. Do sprawdzenia poprawności dowodu zbędne byłoby rozumienie znaczenia pojęć matematyki i logiki oraz intuicja, wystarczałaby umiejętność rozróżniania znaków.



Nacisk, jaki Hilbert kładł na dowody niesprzeczności, był czymś nowym. Jak już wspomniałem, systemy aksjomatyczne opisywały dawniej pojęcia dobrze poznane w sposób nieformalny. Matematycy uważali, że znają dość faktów, aby za pomocą aksjomatów stworzyć idealny obraz rzeczywistości. Powstanie geometrii nieeuklidesowych oraz kłopoty z analizą oraz pojęciem zbioru spowodowały załamanie się tego przekonania. Możliwość tworzenia systemów aksjomatycznych, które byłyby doskonałym odbiciem świata fizycznego, wydawała się coraz bardziej problematyczna. Coraz powszechniejsze stawało się przekonanie, że matematyka jest raczej konstrukcją wolnego umysłu ludzkiego. Dotychczas kryterium poprawności systemu była jego zgodność z intuicją i doświadczeniem, teraz tego kryterium zabrakło i wielu uczonych uważało, że jedynym uzasadnieniem teorii może być jej logiczna niesprzeczność. Spowodowało to wzrost znaczenia dowodów niesprzeczności. Do tej pory opierały się one na teoriach, których niesprzeczność nie budziła wątpliwości. I tak w dowodzie niesprzeczności geometrii nieeuklidesowych posługiwano się geometrią euklidesową, a w dowodzie niesprzeczności geometrii euklidesowej Hilbert posłużył się teorią liczb rzeczywistych. Dowody te polegały na konstruowaniu przy pomocy jednej teorii modeli dla teorii, której niesprzeczności dowodzono. Ale te metody straciły znaczenie w chwili, gdy uznano, że żadna teoria nie ma dostatecznych podstaw. Ponadto było wiele teorii, dla których trudno było znaleźć nawet takie, względne dowody niesprzeczności. Tak było z teorią liczb naturalnych, z teorią liczb rzeczywistych i teorią zbiorów nieskończonych. Było oczywiste, że dla zbudowania modelu dla teorii zbiorów nieskończonych trzeba mieć do dyspozycji zbiory nieskończone, a żadna inna teoria nie gwarantowała istnienia takich zbiorów.
Aby uniknąć kłopotów z konstruowaniem modeli dla różnych teorii, Hilbert zaproponował inną metodę dowodzenia niesprzeczności. Wprowadził pojęcie niesprzeczności formalnej; teoria jest formalnie niesprzeczna, jeśli z aksjomatów tej teorii przy pomocy reguł dowodzenia nie da się udowodnić dwóch zdań sprzecznych lub, co oznacza to samo, jeśli nie uda się wyprowadzić zdania logicznie fałszywego, np. $1 \neq 1$. Dowodzenie w systemie formalnym sprowadza się do skończonej ilości prostych, mechanicznych operacji. Nawet gdy system formalny opisuje zbiory nieskończone, posługiwanie się nim nie wymaga żadnej wiedzy o zbiorach nieskończonych. Hilbert miał nadzieję, że dzięki temu uda się uniknąć kłopotów z powstawaniem błędnego koła. Wyobrażał sobie, że formalną niesprzeczność systemów opisujących zbiory nieskończone lub inne skomplikowane obiekty będzie można udowodnić używając bardzo prostych środków, bez odwoływania się do pojęć i metod mogących budzić wątpliwości, takich jak na przykład zbiory nieskończone. Zamierzenia te udało się zrealizować jedynie w przypadku kilku prostych teorii. Znalezienie dowodów niesprzeczności dla teorii bardziej skomplikowanych było niezwykle trudne.

Program Hilberta przyczynił się do powstania i gwałtownego rozwoju pasjonującej teorii matematycznej nazywanej czasem metamatematyką. Zajmuje się ona badaniem własności systemów formalnych.
Najdokładniej zostały zbadane systemy formalne zwane teoriami elementarnymi. Są one bardzo dobrym przybliżeniem ogólnego pojęcia systemu formalnego, a niektórzy uczeni uważają, że teorie elementarne są jedynymi systemami spełniającymi wszystkie postulaty Hilberta. Jednym z ważniejszych problemów metamatematyki było pytanie, czy dla teorii, która jest formalnie niesprzeczna, można znaleźć model. Pozytywną odpowiedź na to pytanie zawiera twierdzenie K. Gödla z 1930 roku. Z twierdzenia tego wynika też, że aksjomatyzacja logiki podana przez G. Fregego i B. Russella, a użyta przez Hilberta do formalizacji matematyki, jest zupełna. Oznacza to, że dane zdanie można udowodnić z aksjomatów logiki wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono prawdziwe przy wszystkich możliwych interpretacjach występujących w nim symboli matematycznych (pozalogicznych).
Inną bardzo ważną dla programu Hilberta konsekwencją wyniku Gödla było twierdzenie, że zdanie można udowodnić w systemie formalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono prawdziwe we wszystkich modelach tego systemu. Oznacza to, że siła dowodów formalnych jest bardzo duża, że można za ich pomocą udowodnić wszystko, co wynika z aksjomatów.
W trakcie badań nad zagadnieniami niesprzeczności rozważano możliwości interpretowania jednych systemów w innych. Wprawdzie nie udało się tą drogą uzyskać absolutnych dowodów niesprzeczności, niemniej stworzono aparat, który w tej chwili jest bardzo intensywnie stosowany w badaniach nad teorią mnogości i pozwala na istotne osłabianie założeń w dowodach względnej niesprzeczności. Metoda interpretacji okazała się też bardzo użyteczna w badaniach zagadnienia rozstrzygalności.
Hilbert spodziewał się, że systemy formalne służące do opisania jednego obiektu będą zupełne, kategoryczne i rozstrzygalne. Wyjaśnimy kolejno znaczenie tych słów. Teoria jest zupełna, jeśli każde zdanie sformułowane w języku właściwym dla tej teorii można w niej udowodnić lub obalić. Teoria jest kategoryczna, jeśli ma tylko jeden model (interpretację), a jest rozstrzygalna, jeśli istnieje mechaniczna metoda pozwalająca sprawdzić (rozstrzygnąć), czy dane zdanie jest twierdzeniem. Badania nad zupełnością, kategorycznością, a szczególnie nad rozstrzygalnością teorii prowadzone były przez wielu uczonych i dały szereg ciekawych wyników. Niestety rezultaty tych badań były inne niż oczekiwano.

Pierwszym wynikiem, który zachwiał wiarę w możliwość pełnej realizacji programu Hilberta, było twierdzenie Löwenheima-Skolema. Mówi ono, że jeśli teoria ma model nieskończony, to ma także model równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Z twierdzenia tego i twierdzeń G. Cantora wynika między innymi, że teoria zbiorów i teoria liczb rzeczywistych nie są kategoryczne. Twierdzenie Löwenheima-Skolema prowadziło do tak zwanego paradoksu Skolema: Rozpatrzmy model teorii zbiorów, który jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. W tym modelu prawdziwe są wszystkie twierdzenia teorii zbiorów. Wobec tego, na mocy twierdzenia Cantora, istnieje w nim zbiór nieskończony, który nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, a więc ma większą liczbę elementów niż zbiór liczb naturalnych. Z drugiej strony, zbiór ten jest elementem naszego modelu i nie może mieć więcej niż on elementów. Uczeni szybko odkryli błąd w przytoczonym wyżej rozumowaniu i paradoks Skolema okazał się niegroźny dla podstaw teorii mnogości. T. Skolem skonstruował też model peanowskiej arytmetyki liczb naturalnych, który zawiera niestandardowe „liczby naturalne", większe od każdej prawdziwej liczby naturalnej, a mimo to są w nim prawdziwe te i tylko te zdania elementarne, które są prawdziwe w modelu zbudowanym z liczb naturalnych. Wobec tego elementarna teoria liczb naturalnych ma dwa różne modele, a więc nie jest kategoryczna.

Powiedzenie, że dwa zbiory są równoliczne oznacza, że istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna odwzorowująca jeden ze zbiorów na drugi. W przeliczalnym modelu teorii mocy istnieją dwa zbiory, które, patrząc z zewnątrz, są przeliczalne, a więc równoliczne, ale funkcja ustalająca równoliczność nie należy do modelu.

Niedługo potem K. Gödel pokazał, że arytmetyka Peano, teoria formalna opisująca liczby naturalne, jest niezupełna, dokładniej, udowodnił, że jeśli arytmetyka Peano jest niesprzeczna, to istnieje zdanie prawdziwe, którego w niej udowodnić ani obalić w sposób formalny nie można. Co więcej, nie można zapewnić zupełności przez dodanie nowych aksjomatów. Każda teoria rozszerzająca arytmetykę Peano jest niezupełna, jeśli tylko system aksjomatów jest zadany w sposób efektywny, to znaczy jeśli istnieje metoda rozstrzygnięcia, czy dane zdanie jest aksjomatem. Z twierdzenia Gödla wynika, że w systemach formalnych nie można udowodnić wszystkich prawdziwych zdań matematyki, natomiast A. Tarski udowodnił twierdzenie o niedefiniowalności pojęcia prawdy, z którego wynika, że w systemach formalnych nie można zdefiniować wszystkich naturalnych pojęć.
Podobnych wyników było więcej. Okazało się, że wiele teorii jest nierozstrzygalnych. A. Church udowodnił, że zbiór twierdzeń logiki jest nierozstrzygalny, a J. B. Rosser, że żadna teoria, której modelem są liczby naturalne, nie może być rozstrzygalna. Niedawno J. Matijasiewicz pokazał, że nie ma metody rozstrzygania nawet bardzo prostych pytań — czy zadane równanie algebraiczne o współczynnikach całkowitych ma rozwiązanie w liczbach naturalnych.
Z twierdzeń o niezupełności i nierozstrzygalności wynika, że nie można zbudować systemu aksjomatycznego opisującego wszystkie własności liczb naturalnych. Podobne twierdzenia są prawdziwe dla wielu teorii, między innymi dla teorii zbiorów. Tak więc pierwsza część programu Hilberta — zaksjomatyzowanie całej matematyki — jest nierealna.
Podobny los spotkał drugą część programu. W 1931 roku K. Gödel udowodnił bowiem, że jeśli tylko teoria T jest dostatecznie bogata, to znaczy jeśli można w niej opisać pewien fragment arytmetyki liczb naturalnych, to niesprzeczności T nie można w T udowodnić. W szczególności za pomocą środków dostępnych w arytmetyce Peano nie można udowodnić jej niesprzeczności. To samo dotyczy teorii ZF. Wiadomo, że wszystkie metody, które Hilbert uważał za dopuszczalne w dowodach niesprzeczności, można sformalizować i opisać w arytmetyce Peano. Stąd i z twierdzenia Gödla wynika, że absolutnego dowodu niesprzeczności arytmetyki Peano ani teorii mnogości podać nie można. Warto może na zakończenie dodać, że dla arytmetyki można podać względne dowody niesprzeczności, chociażby na gruncie teorii ZF. Natomiast dla teorii mnogości takich dowodów nie ma, jeśli pominąć dowody posługujące się „liczbami nieosiągalnymi", których istnienie jest znacznie bardziej problematyczne niż niesprzeczność teorii ZF.
Nie spełniły się marzenia Hilberta o aksjomatyzowalności matematyki. Trudno jednoznacznie rozstrzygnąć, czy to dobrze, czy źle. Jedno jest pewne, nieaksjomatyzowalna matematyka jest dużo ciekawsza i o wiele bardziej fascynująca niż jakikolwiek system formalny.