mała delta

O tabelkach działań, symetriach i teorii grup

Każde dwie liczby naturalne możemy dodać i w wyniku otrzymamy liczbę, zwaną ich sumą. Wynik mnożenia nazywamy iloczynem, a odejmowania — różnicą. Wiemy, że różnica liczb naturalnych nie musi być liczbą naturalną — natomiast zawsze jest liczbą całkowitą. Mówimy, że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie, a nie jest zamknięty ze względu na odejmowanie.

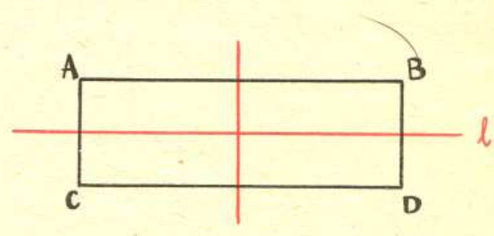
Są działania, o których nie uczymy się w szkole. Matematycy mówią, że w zbiorze X określiliśmy działanie, jeżeli każdym dwóm elementom (nie muszą one być różne) zbioru X przypisaliśmy pewien trzeci element (znów, niekoniecznie inny niż oba poprzednie) tego zbioru. Ten związany z a i b trzeci element nazywamy wynikiem działania na a i b; oznaczmy go na przykład przez $a \oplus b$, $a \square b$ lub nawet po prostu $a \cdot b$.

Możemy teraz wykonywać działania na rozmaitych obiektach. Weźmy liczby 0, 1, 2, 3 i rozważmy w tym czteroelementowym zbiorze działanie, które opisuje tabelka 1. Aby odczytać, czemu jest równe np. $2 \cdot 3$, znajdujemy liczbę stojącą na przecięciu rzędu poziomego „2" i pionowej kolumny „3" — czyli $2 \cdot 3 = 1$.

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Tabelka 1

Niech X oznacza symetrię prostokąta ABCD (przedstawionego niżej) względem poziomej osi symetrii — a zatem przy przekształceniu X punkty prostokąta przechodzą na swe lustrzane odbicia względem prostej l. Symetrię względem osi pionowej oznaczamy przez Y, a obrót o 180° — przez R.



Dwukrotne wykonanie każdego z przekształceń X, Y, R przywraca wszystkie punkty prostokąta do pierwotnego położenia.

Zapiszemy to tak: $X \circ X = Y \circ Y = R \circ R = I$. Przez I rozumiemy przekształcenie tożsamościowe, to jest takie, przy którym wszystkie punkty pozostają na swoich. miejscach. Jak możemy się przekonać, że $X \circ Y = R$? Działanie $\circ$ w czteroelementowym zbiorze I, X, Y, R opisuje tabelka 2.

	I	X	Y	R
I	I	X	Y	R
X	X	I	R	Y
Y	Y	R	I	X
R	R	Y	X	I

Tabelka 2

Będziemy mnożyć pary liczb. „Iloczynem" pary (a, b) przez parę (c, d) nazwiemy parę (ac, bd). Piszmy p zamiast pary $(1, 1)$, q — zamiast $(-1, 1)$, r — zamiast $(1, -1)$ i wreszcie s zamiast $(-1, -1)$. Rozróżniamy więc kolejność składników! Można łatwo sprawdzić, że nasze działanie „mnożenia" opisuje tabelka 3.

	p	*q*	*r*	*s*
p	*p*	*q*	*r*	*s*
q	*q*	*p*	*s*	*r*
r	*r*	*s*	*p*	*q*
s	*s*	*r*	*q*	*p*

Tabelka 3

Pozornie wygląda ona zupełnie inaczej niż pozostałe dwie. Ale oto w każdej z nich zamiast kolejnych elementów piszmy — w tym samym porządku! — o, a, b, c. Za każdym razem otrzymamy tę samą tabelkę 4 i widzimy, że „w gruncie rzeczy" wszystkie one są takie same. Treść matematyki nie zależy przecież od przyjętych oznaczeń. Rozpatrywane tu działania muszą mieć identyczne własności. A jak przekonać się, że przez żadną zmianę oznaczeń z tabelki 5 nie otrzymamy nigdy czwartej?

	o	*a*	*b*	*c*
o	*o*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*o*	*c*	*b*
b	*b*	*c*	*o*	*a*
c	*c*	*b*	*a*	*o*

Tabelka 4

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabelka 5

Tabelka 2 opisuje tak zwaną grupę symetrii prostokąta. Matematycy i fizycy na grupy napotykają wszędzie, szczególnie w algebrze abstrakcyjnej, która zajmuje się odkrywaniem i badaniem własności działań. Poznaliśmy jedną z podstawowych takich własności: jeżeli dwa działania mają tabelki, które nie różnią się budową, a tylko oznaczeniami, to własności tych działań są identyczne. Matematyk mówi: każda z tabelek 1, 2, 3, 4 opisuje grupę symetrii prostokąta. Poszukajcie i innych działań, których tabelki są „w gruncie rzeczy takie same" jak 1, 2, 3, 4. Zbadajcie na przykład własności takich czterech operacji na liczbach $a \mapsto a$, $a \mapsto -a$, $a \mapsto \frac{1}{a}$, $a \mapsto -\frac{1}{a}$. Co widzimy, wykonując te operacje kolejno?

Radio

Rozwiązanie zadania z kwietniowej Radiodelty

Zadanie Znaleźć nieskończoną ilość takich rozwiązań równania $x^2+y^2=z^2$, że x, y, z są liczbami naturalnymi i $y-x=z-y$.

Rozwiązanie Zauważmy, że $3^2+4^2=5^2$. Zatem trójka liczb (3, 4, 5) stanowi rozwiązanie o żądanej własności. Mając jedno rozwiązanie, możemy otrzymać ich nieskończoną ilość. Wystarczy spostrzec, że również trójki liczb $(3k, 4k, 5k)$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną, spełniają nasze warunki.

Można wykazać przy tym, że są to już wszystkie takie rozwiązania. Przyjmijmy, że $y-x=a$. Wówczas $y=x+a$, $z=x+2a$. Równanie przybiera postać $x^2+(x+a)^2=(x+2a)^2$, a po odpowiednich przeliczeniach $x^2-2ax-3a^2=0$. Wykorzystując stosowne wzory obliczamy: $\Delta=16a^2$, $x_1=3a$, $x_2=-a$. Otrzymujemy stąd rozwiązania dwojakiego rodzaju: po pierwsze trójki liczb postaci $(-a, 0, a)$, a po drugie $(3a, 4a, 5a)$. Ponieważ w pierwszym przypadku nie otrzymujemy rozwiązań w liczbach naturalnych, więc rzeczywiście wszystkie rozwiązania mają postać: $x=3a$, $y=4a$, $z=5a$.

Ostatnią audycję w tym roku szkolnym nadamy w maju — 18 — o godz. 10^{00}.