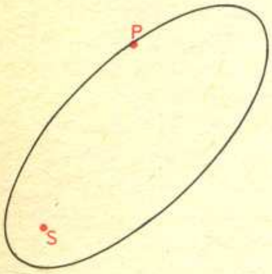
Co to jest teoria względności

PODSTAWY GEOMETRYCZNE

Dr Andrzej KRASIŃSKI

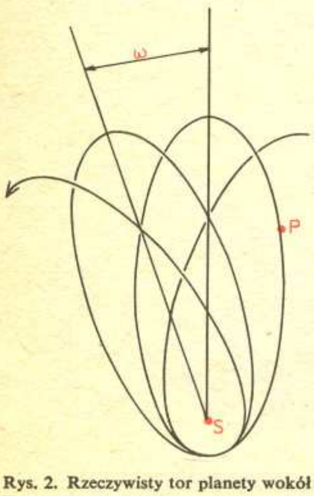
Odpowiedź na tytułowe pytanie zacznijmy od stwierdzenia, że: Istnieją dwie teorie względności. Pierwsza z nich, zwana szczególną, została opublikowana przez Alberta Einsteina w roku 1905 jako podsumowanie długiej serii prac, częściowo jego własnych, częściowo zaś innych autorów, wśród których przede wszystkim trzeba wymienić fizyka H. A. Lorentza, wielkiego matematyka i fizyka H. Poincarégo oraz matematyka H. Minkowskiego. Teoria ta zajmuje się zjawiskami mechanicznymi i elektromagnetycznymi zachodzącymi w układach poruszających się jeden względem drugiego z dużymi prędkościami („dużymi" znaczy tu: powyżej kilkunastu procent prędkości światła w próżni). Mówi się w niej o względnym spowolnieniu biegu czasu w dwu poruszających się względem siebie układach, o niemożności „prześcignięcia światła", o tym, że zdarzenia równoczesne dla jednego obserwatora mogą nie być równoczesne dla innego, i o wielu innych tak zwanych paradoksach, dobrze znanych czytelnikom literatury popularnej. Głównym tematem niniejszego artykułu będzie druga teoria względności, zwana ogólną, nad którą Einstein pracował w latach 1905—1915. Jest ona, jak wskazuje nazwa, uogólnieniem poprzedniej. Ta pierwsza zajmowała się bowiem opisem zjawisk zachodzących bez udziału sił grawitacyjnych, podczas gdy teoria ogólna opisuje zjawiska fizyczne zachodzące w obecności pola grawitacyjnego. Z tego powodu ogólna teoria względności, choć wywodzi się z „czystej" fizyki, jest silnie powiązana z astronomią — nauką o obiektach i zjawiskach, w których grawitacja jest wszechobecnym, często najważniejszym elementem.



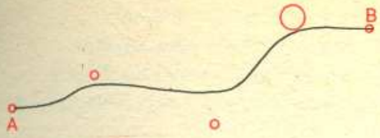
Rys. 1. Tor planety P wokół Słońca S według teorii Newtona w hipotetycznym przypadku, gdy Słońce ma tylko jedną planetę.

SKĄD SIĘ WZIĘŁA OGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI

W początkach XX wieku mechanika i teoria grawitacji Newtona, oparte na trzech znanych prawach dynamiki, wydawały się niewzruszalną podstawą całej fizyki i nikt poważnie nie wątpił w ich prawdziwość. Istniała tylko jedna luka w tym pozornie doskonałym dziele. Zgodnie z teorią Newtona, planety powinny krążyć wokół Słońca po zamkniętych torach eliptycznych. Ściślej mówiąc, gdyby Słońce miało tylko jedną planetę, jej tor powinien być elipsą o ognisku w środku masy układu Słońce — planeta. Ponieważ w rzeczywistości układ słoneczny składa się z 9 planet oraz znacznej liczby księżyców, planetoid i komet, wszystkie te ciała zaburzają nawzajem swoje orbity i żadna z nich nie jest ściśle eliptyczna. Zaburzenia toru planety pochodzące od księżyców innych planet oraz od komet są na tyle małe, że można je pominąć. Zsumowane zaburzenia pochodzące od pozostałych 8 planet ujawniają się w ten sposób, że tor planety jest krzywą „rozetkową", którą można sobie wyobrazić w następujący sposób. Przypuśćmy, że dana planeta porusza się po prawdziwej elipsie, lecz elipsa ta równocześnie obraca się powoli wokół swojego ogniska w tym samym kierunku, w którym planeta krąży. Wówczas, po wykonaniu obiegu o 360° wokół Słońca, planeta nie powróci do punktu wyjściowego. Proste, poprowadzone z ogniska orbity do dwóch kolejnych punktów maksymalnego oddalenia planety od Słońca, będą tworzyły różny od zera kąt zwany kątem obrotu aphelium (z powodów technicznych w astronomii mierzy się raczej kąt obrotu perihelium, czyli punktu minimalnego oddalenia planety od Słońca). Kąt ten jest tym większy, im bliżej Słońca leży dana planeta. W przypadku Merkurego wynosi on $5599{,}74 \pm 0{,}41$ sekund kątowych na stulecie. Jest to efekt na tyle wyraźny, że był znany astronomom już w pierwszej połowie XIX wieku. Jednak w roku 1859 francuski astronom U. J. Leverrier stwierdził, że zsumowane oddziaływania pozostałych planet nie wystarczą do wywołania tak dużego obrotu perihelium Merkurego. Obrót obserwowany jest o $(43{,}11 \pm 0{,}45)''$ na stulecie za duży. Rozbieżność ta stała się jednym z głównych problemów XIX-wiecznej astronomii, zaś jej wyjaśnienie — pierwszym i do dziś najważniejszym sukcesem ogólnej teorii względności.

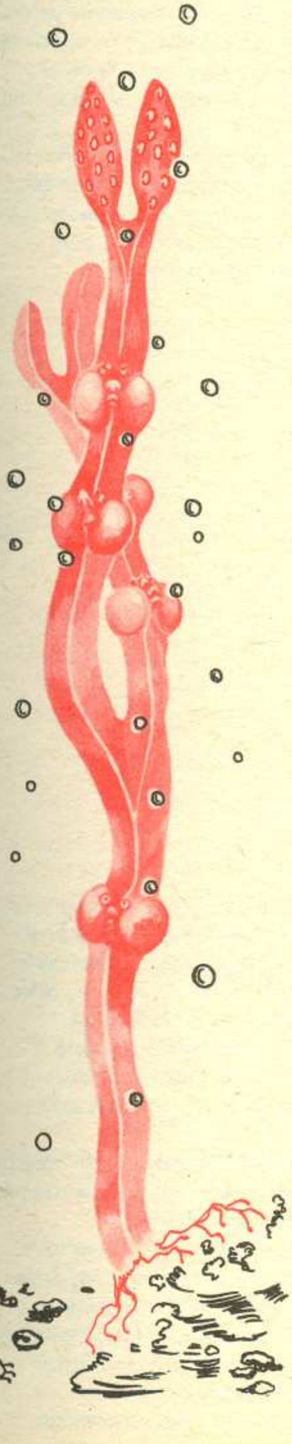


Rys. 2. Rzeczywisty tor planety wokół Słońca. ω — kąt obrotu aphelium podczas jednego okrążenia (znacznie przesadzony).



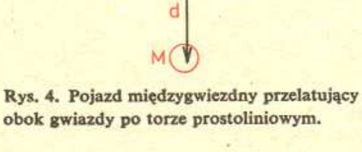
Rys. 3. „Wzorcowy liniał" rozciągnięty między gwiazdami A i B, powyginany przez pola grawitacyjne innych gwiazd. W fizyce Newtona uważano to zjawisko za skutek działania sił grawitacyjnych. W teorii Einsteina (patrz koniec artykułu) jest to efekt geometryczny.

Wyjaśnienie to było „efektem ubocznym" teorii Einsteina, nie zaś wytyczonym z góry celem. Punkt wyjścia rozumowania, na którym oparła się teoria względności, był następujący. Pierwsze prawo dynamiki Newtona powiada, że w przestrzeni wolnej od wszelkich oddziaływań fizycznych każde ciało poruszałoby się ruchem jednostajnym i prostoliniowym. Jeśli jednak próbujemy zastosować pierwsze prawo Newtona do jakichkolwiek obiektów astronomicznych, przekonujemy się zaraz, że przestrzeń wolna od oddziaływań po prostu nie istnieje. Wszędzie, od skali układu planetarnego do skali całego Wszechświata, działa pole grawitacyjne, powstające przez nałożenie się na siebie oddziaływań grawitacyjnych wszystkich ciał obecnych we Wszechświecie. Zatem pierwsze prawo dynamiki jest tylko abstrakcją, która nigdzie nie może realizować się ściśle. Teoria Newtona miała na to argument w postaci następującego wniosku z II prawa dynamiki: na skutek wszechobecności grawitacji rzeczywiste tory ruchu ciał we Wszechświecie ulegają zakrzywieniu. Tu można zapytać: zakrzywieniu, ale względem czego? Skoro mówimy, że coś jest krzywe, zakładamy automatycznie, że wiemy, co jest proste. A więc: co to jest linia prosta, skoro nie możemy wskazać realnego ciała poruszającego się po niej?

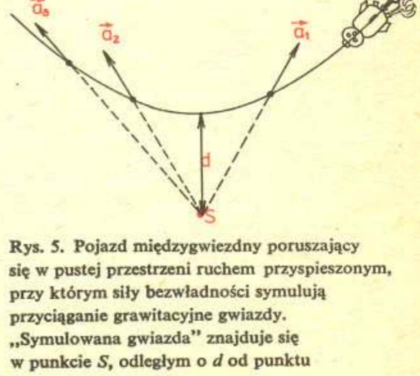


Szkolny kurs geometrii wyrabia w nas pewne „euklidesowe" intuicje i w pierwszym momencie każdemu wydaje się, że wyznaczenie „idealnej" linii prostej biegnącej przez dowolnie duże obszary Wszechświata jest w zasadzie możliwe. Po chwili zastanowienia jednak nie wydaje się to już tak oczywiste. Czy wzorcem prostej byłby sznurek rozciągnięty od gwiazdy do gwiazdy lub odpowiednio długi liniał? Pomijając techniczną nierealność takiego wzorca, odpowiedź brzmi oczywiście: nie! I sznurek i liniał musiałby też ugiąć się pod działaniem sił grawitacyjnych. Po głębszym zastanowieniu padłaby może propozycja: linią prostą jest przedłużenie osi teleskopu. Jeżeli obserwator patrzący z pewnego punktu widzi dwa obiekty astronomiczne dokładnie w tym samym kierunku, dalszy ukryty za bliższym, to obiekty te muszą leżeć na jednej prostej z obserwatorem. Przełożona na język fizyki definicja ta mówi: promienie świetlne rozchodzą się po liniach prostych. Czy to fakt, czy znów fałszywa intuicja?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, przeprowadźmy pewien eksperyment myślowy. Przypuśćmy, że wyznaczenie kierunku idealnej prostej jest możliwe, i że po takim idealnym torze prostym porusza się pojazd międzygwiezdny pozbawiony wszelkich urządzeń umożliwiających zobaczenie tego, co dzieje się na zewnątrz. Wyobraźmy sobie, że przelatuje on, ze stałą prędkością v, obok gwiazdy o masie M. Niech minimalna odległość pojazdu od środka gwiazdy (tzn. odległość środka gwiazdy od toru) wynosi d, zaś moment osiągnięcia odległości d oznaczmy przez $t = 0$. Wtedy natężenie pola grawitacyjnego działającego na pojazd w dowolnej chwili t będzie równe $g = \frac{GM}{d^2+v^2t^2}$ i będzie skierowane stale do środka gwiazdy (G — stała grawitacyjna Newtona). Wyobraźmy sobie teraz drugi pojazd, który porusza się z dala od wszelkich gwiazd i planet, ale porusza się po linii krzywej, z niestałym przyspieszeniem równym $a = \frac{GM}{d^2+v^2t^2}$ skierowanym stale od tego samego punktu przestrzeni. Tym razem G, M, d i v są parametrami o wymiarach odpowiednio stałej grawitacji, masy, odległości i prędkości dobranymi tak, aby zależność a od t była dokładnie taka sama, jak zależność g od t (w drugim przykładzie stały parametr v nie jest równy prędkości pojazdu, prędkość tę można obliczyć ze wzoru $v(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\mathrm{d}t + v(t_0)$; jest ona oczywiście zmienna). Siła bezwładności będzie wtedy skierowana przeciwnie do wektora przyspieszenia, a więc będzie skierowana wciąż do tego samego punktu i będzie zależała od czasu w taki sam sposób, jak siła grawitacyjna w pierwszym przykładzie. Krótko mówiąc, będzie dokładnie imitowała siłę grawitacyjną. Do jakiego stopnia dokładnie?

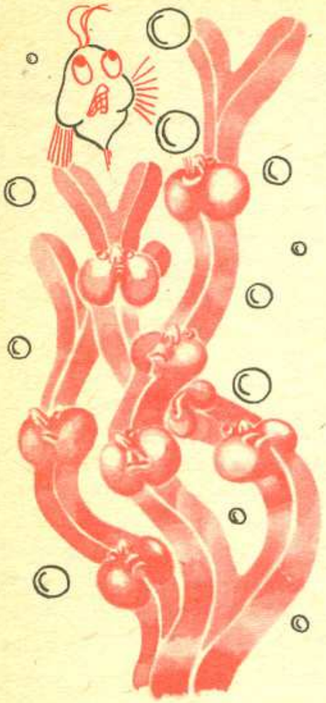


Rys. 4. Pojazd międzygwiezdny przelatujący obok gwiazdy po torze prostoliniowym.



Rys. 5. Pojazd międzygwiezdny poruszający się w pustej przestrzeni ruchem przyspieszonym, przy którym siły bezwładności symulują przyciąganie grawitacyjne gwiazdy. „Symulowana gwiazda" znajduje się w punkcie S, odległym o d od punktu maksymalnej krzywizny toru. a_1, a_2, a_3 — przyspieszenia w różnych punktach toru.

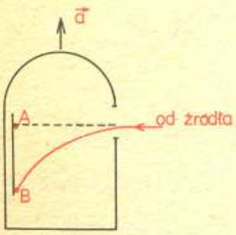
Od czasów Galileusza wiadomo było, że imitacja ta jest zupełna w zjawiskach mechanicznych. Intuicja podpowiadała, że w takim razie analogia powinna być zupełna i w pozostałych zjawiskach, bo własności mechaniczne ciał są tylko powierzchownym obrazem oddziaływań elektromagnetycznych i jądrowych, decydujących o strukturze ciał, ich elastyczności itp. Efekty elektromagnetyczne również nie powinny wobec tego odróżniać sił bezwładności od sił grawitacyjnych. Światło zaś jest strumieniem fal elektromagnetycznych. Zatem...



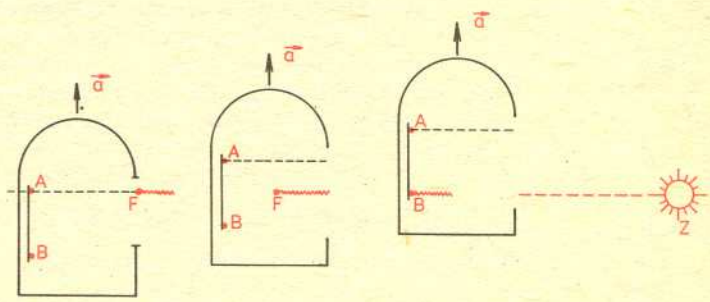
Zanim przeprowadzimy następny eksperyment myślowy, wyjaśnimy małe oszustwo. Obserwator z pierwszego przykładu mógł oczywiście wyjrzeć na zewnątrz pojazdu, zobaczyć, że przelatuje obok gwiazdy i wywnioskować stąd, że działa na niego siła grawitacyjna, a nie siła bezwładności. Dlatego zabroniliśmy mu wyglądać (oszustwo zawsze lubi ukrywać się za niezrozumiałymi surowymi zakazami i ograniczeniami). Sens fizyczny tego ograniczenia był taki: siły grawitacyjne można odróżnić od sił bezwładności tylko przy pomocy informacji zebranych z dużych obszarów przestrzeni, natomiast w eksperymentach lokalnych, przeprowadzanych w małym otoczeniu pojedynczego punktu, te dwa rodzaje oddziaływań są nierozróżnialne.

Przeprowadźmy teraz następny eksperyment myślowy. Przypuśćmy, że nasz pojazd międzygwiezdny porusza się po linii prostej ruchem jednostajnie przyspieszonym i w pewnym momencie przecina prostopadle promień świetlny. Światło wpada przez okienko i tworzy jasną plamkę na przeciwległym ekranie. Gdyby pojazd stał w miejscu, promień taki powinien, w myśl mechaniki Newtona, biec po linii prostej. Zaznaczmy na ekranie miejsce, gdzie wówczas powstałaby plamka świetlna.

Co się dzieje w przyspieszającym pojeździe? Zanim światło przebiegnie od okienka do ekranu, pojazd przesunie się o pewien odcinek. Plamka powinna więc powstać nieco poniżej zaznaczonego miejsca. Zatem promień świetlny ugina się, gdy obserwować go z układu przyspieszonego. Skoro zaś siły bezwładności lokalnie imitują siły grawitacyjne, powinien uginać się także w polu grawitacyjnym. Nie byłby więc wzorcem linii prostej w przestrzeni z grawitacją.



Rys. 6. W pojeździe przecinającym prostopadle promień świetlny następuje pozorne ugięcie promienia: promień trafia w ekran w punkcie B, zamiast w punkcie A. Rysunek powyższy przedstawia sytuację w układzie odniesienia związanym z pojazdem.

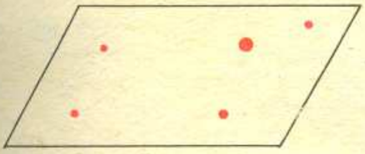


Rys. 7. Ta sama sytuacja, co na rys. 6, narysowana w układzie odniesienia związanym ze źródłem światła *Z*. Trzy rysunki dotyczą trzech różnych chwil czasu: a) Foton F wpada przez okno, b) Foton w połowie drogi od okna do ekranu, c) Foton trafia w ekran.

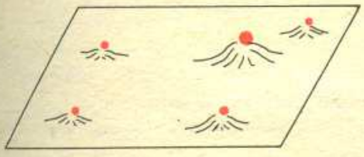
W tym miejscu należy podkreślić wielką śmiałość intelektualną Einsteina. Do jego czasów nie wykonano żadnych obserwacji, które sugerowałyby uginanie się promieni świetlnych w polu grawitacyjnym, ponieważ nikt o takiej możliwości nie pomyślał, zaś wielu ludziom wydawała się ona niedorzeczna. Einstein zaryzykował postawienie takiej hipotezy, zaś kilka lat po ogłoszeniu jej drukiem, w roku 1919, ekspedycja astronomiczna pod kierunkiem A. S. Eddingtona przeprowadziła obserwacje, które z małą wprawdzie dokładnością, ale zupełnie wyraźnie potwierdziły ją (jak się robi takie obserwacje, powiemy w następnym artykule). Śmiałość Einsteina polegała również na tym, że poszedł dalej za wnioskami ze swojej hipotezy, nie czekając na jej potwierdzenie.

Skoro nawet promienie świetlne nie mogą być wzorcami fizycznymi linii prostej, trzeba spojrzeć prawdzie w oczy i powiedzieć sobie twardo, że wzorzec linii prostej nie istnieje. Teoria Newtona nie potrafi więc wskazać, jak wyglądałby hipotetyczny tor obiektu astronomicznego w przestrzeni wolnej od grawitacji, a więc nie umie stwierdzić, na ile tor rzeczywisty odchyla się od niego. W tej sytuacji jest rzeczą rozsądniejszą założyć, że pole grawitacyjne modyfikuje geometrię w przestrzeni, zaś w owej zmodyfikowanej geometrii torami ruchów *swobodnych* są nie linie proste, lecz okręgi, elipsy, hiperbole i inne orbity znane z astronomii obserwacyjnej. Teoria oparta na takich założeniach będzie może trudniejsza w zastosowaniach, lecz będzie używała pojęć mających bezpośredni sens fizyczny i nie będzie musiała posługiwać się abstrakcyjnym tłem w postaci przestrzeni euklidesowej — niemożliwej do zaobserwowania.

FIZYKA A GEOMETRIA



Rys. 8. Dwuwymiarowy model przestrzeni euklidesowej w teorii Newtona. Geometria nie zależy od rozkładu materii, przestrzeń jest płaska.



Rys. 9. Dwuwymiarowy model krzywej przestrzeni używanej w teorii Einsteina: Im silniejsze pole grawitacyjne, tym bardziej „krzywa" przestrzeń. Dla wyrazistości rysunku wysokości „wzgórków" są znacznie przesadzone.

Intuicja geometryczna człowieka jest bardzo ograniczona. Potrafimy sobie wyobrazić trójwymiarową przestrzeń euklidesową, która bywa nazywana płaską, lecz „zakrzywiona" przestrzeń trójwymiarowa sprawia naszej wyobraźni już duże kłopoty.
Przestrzenie o liczbie wymiarów większej niż trzy wymykają się wyobraźni zupełnie. Chcąc mieć pewne pojęcie o „krzywej" geometrii w przestrzeni wielowymiarowej, musimy posługiwać się dwuwymiarowymi analogiami. Istnieje wiele dwuwymiarowych powierzchni, których geometria nie jest euklidesowa (najlepiej znanym przykładem jest powierzchnia kuli). Posłużmy się dwuwymiarowym modelem przestrzeni dla objaśnienia podstawowej różnicy między teorią Newtona a teorią Einsteina.
Według tej pierwszej przestrzeń była płaszczyzną, bez względu na obecność lub brak materii. W teorii Einsteina przestrzeń jest prawie płaszczyzną tam, gdzie pola grawitacyjne są bardzo słabe, zaś w otoczeniu ciał wytwarzających pole grawitacyjne na płaszczyźnie pojawiają się „wzgórki" — tym wyższe, im silniejsze pole grawitacyjne.
Taki słowny opis nie może być oczywiście podstawą teorii fizycznej. Dobra teoria musi operować ścisłymi prawami, wyrażonymi przez równania matematyczne. Równania takie, zwane równaniami Einsteina, ma również teoria względności. Są one jednak na tyle zawikłane i operują tak zaawansowanym aparatem matematycznym, że ich przedstawienie w krótkim artykule nie jest możliwe.
Poprzestańmy więc na stwierdzeniu, że wiążą one gęstość materii i wszystkich rodzajów energii w otoczeniu danego punktu przestrzeni i danej chwili czasu z prawami geometrii obowiązującymi w otoczeniu tego punktu i chwili.

W tym miejscu pojawi się w naszym wywodzie nieciągłość.
W następnym artykule powiemy o doświadczalnych testach teorii względności. Pominiemy natomiast drogę, która prowadzi od założeń, przedstawionych w skrócie powyżej, do wniosków, czyli przewidywanych wyników eksperymentów. Droga ta nie da się bowiem prześledzić bez pomocy zaawansowanej matematyki.

W powyższym artykule dla większej przejrzystości Autor nie używa terminu matematycznego stosowanego powszechnie, a mającego istotne znaczenie w omawianej problematyce. Chodzi mianowicie o pojęcie geodezyjnej (ściślej mówi się linii geodezyjnej, tak jak: linii prostej). Geodezyjne w danej przestrzeni to linie najkrótsze.
Gdy naszą przestrzenią jest np. sfera, to geodezyjne są okręgami kół wielkich — patrz wyżej. Nazwę „geodezyjna" można objaśnić następująco: długość szyn „prostego" toru kolejowego między miejscowościami A i B jest równa nie odległości tych miejscowości zmierzonej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, a długości łuku przecięcia powierzchni Ziemi płaszczyzną przechodzącą przez A, B i środek Ziemi — takie zagadnienia rozpatrują geodeci. Rozpatrując jakąś przestrzeń wewnętrznie używa się niejednokrotnie terminu „prosta" zamiast „geodezyjna", nie uważając za słuszne rezerwowania nazwy „prosta" tylko dla geometrii euklidesowej. W teorii względności tor, po którym biegnie światło, jest traktowany jak prosta (bo jest geodezyjną, o ile odległość mierzymy czasem przebiegu światła — prawda?). Warto tu zajrzeć do artykułu Alberta Einsteina, Delta 2/1977.

(Red.)

Rozwiązanie zadania M 158

Załóżmy, że α nie jest wielokrotnością liczby π, a więc $\alpha = 2k\pi+\beta$, gdzie $0 < \beta < \pi$. Z warunków zadania wynika, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 jest $\sin(n-1)\alpha \leqslant \sin(n+1)\alpha$, czyli $\sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha \geqslant 0$, $\quad 2\sin\alpha\cos n\alpha \geqslant 0$.
Jeżeli l, m są dowolnymi liczbymi naturalnymi większymi od 1, to $2\sin\alpha\cos l\alpha \geqslant 0$, $2\sin\alpha\cos m\alpha \geqslant 0$, skąd wynika, że $4\sin^2\alpha\cos l\alpha\cos m\alpha \geqslant 0$ i ponieważ $\sin\alpha \neq 0$, więc $\cos l\alpha\cos m\alpha \geqslant 0$.
Wykażemy teraz, że istnieją liczby naturalne l i m, obydwie większe od 1, dla których $\cos l\alpha\cos m\alpha < 0$.
Przedziały $\left(\frac{3\pi}{2|\beta|}, \frac{5\pi}{2|\beta|}\right)$ i $\left(\frac{5\pi}{2|\beta|}, \frac{7\pi}{2|\beta|}\right)$ mają długość $\frac{\pi}{|\beta|} > 1$. W każdym z nich znajduje się więc pewna liczba naturalna większa od 1 $\left(\text{gdyż } \frac{3\pi}{2|\beta|} > \frac{3}{2}\right)$. Niech liczbami takimi będą l i m:

$$\frac{3\pi}{2|\beta|} < l < \frac{5\pi}{2|\beta|}, \quad \frac{5\pi}{2|\beta|} < m < \frac{7\pi}{2|\beta|},$$

$$\frac{3}{2}\pi < l|\beta| < \frac{5}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi < m|\beta| < \frac{7}{2}\pi.$$

Wówczas $\cos l\alpha\cos m\alpha = \cos(2kl\pi + l\beta)\cos(2km\pi + m\beta) = \cos l\beta\cos m\beta = \cos l|\beta|\cos m|\beta| < 0$, gdyż $\cos l|\beta| > 0$, $\cos m|\beta| < 0$.
Założenie, że α nie jest wielokrotnością liczby π doprowadziło nas do sprzeczności, a więc przy pewnym całkowitym p musi być $\alpha = p\pi$. Wtedy oczywiście $\sin n\alpha = \sin(n+1)\alpha = 0$ dla każdej liczby naturalnej n.

Rozwiązanie zadania M 157

Podstawiając w pierwszej równości zamiast x liczbę $x+a$ otrzymujemy $f(x+2a) = g(x+a)$, skąd na mocy drugiej równości wynika, że

$$f(x+2a) = -f(x).$$

Podstawiając tu zamiast x liczbę $x+2a$ otrzymujemy

$$f(x+4a) = -f(x+2a) = f(x).$$

Ponadto $g(x+4a) = f(x+a+4a) = f(x+a) = g(x)$, a więc okresem każdej z funkcji f i g jest $4a$.
Przykładem funkcji f i g spełniających podane w zadaniu warunki przy $a = \frac{\pi}{2}$ są funkcje sinus i cosinus.

Rozwiązanie zadania M 159

Niech danymi liczbami bądą $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Utwórzmy iloczyn $P = a_1a_2 \ldots a_m a_1 a_2 \ldots \ldots a_m \ldots a_1a_2 \ldots a_m$ mający mn czynników. Grupując w nim wyrazy po n otrzymujemy iloczyn m liczb, z których każda, jako iloczyn n danych liczb, jest większa od 1. Liczba $(a_1a_2 \ldots a_m)^n = P$, jest więc iloczynem liczb większych od 1, zatem $P > 1$, $a_1a_2 \ldots a_m = \sqrt[n]{P} > 1$.