Program Leibniza

Ale państwo się mylą, mówiłem o szynce

W kilkanaście lat po opublikowaniu przez Kartezjusza *Rozprawy o metodzie*, a właściwie jednego z jej aneksów, nazwanego *Geometria analityczna*, Gottfried Leibniz poddał zawarte w tej pracy idee zdecydowanej krytyce.

Kartezjusz zaproponował używanie w geometrii metod algebraicznych, a właściwie sprowadził geometrię do roli pewnego działu algebry. Za pomocą wprowadzonego przez siebie pojęcia — układu współrzędnych — tłumaczył wszelkie zależności geometryczne na zależności liczbowe (między współrzędnymi odpowiednich punktów). W ten sposób każdy problem geometryczny mógł być rozwiązany przez rozpatrzenie odpowiedniego problemu dotyczącego liczb.

Ponieważ metody algebry były wówczas (wiek XVII) bardzo dobrze już rozwinięte, a do metod geometrycznych nie wniesiono wiele od Starożytności, więc zysk, jaki dawało ujęcie kartezjańskie, był dla wszystkich oczywisty.

Dokładniej rzecz traktując: chodziło o używanie w geometrii działań, które są o wiele bardziej poręcznym narzędziem (np. + czy dla liczb rzeczywistych) niż relacje (takie, jak np. $\perp$ czy $\|$ w geometrii). Pomysł, żeby (chcąc używać działań w geometrii) przenieść pojęcia geometryczne tam, gdzie działania już mamy, odznacza się prostotą właściwą dla umysłu Kartezjusza. Jest to więc rzeczywiście dobra demonstracja wartości jego systemu filozoficznego.

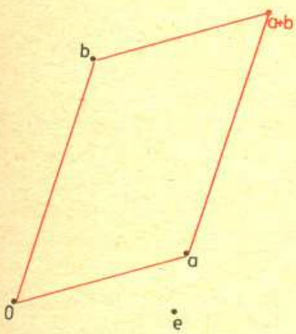
Leibniz swoją krytykę oparł również na argumentach z zakresu filozofii. Uważał mianowicie, że każda ludzka działalność winna być prowadzona za pomocą właściwych dla niej środków. W szczególności więc geometrię należy uprawiać metodami geometrycznymi. A ponieważ również i on uważał działania za bardzo poręczne narzędzie, więc postulował uprawianie geometrii za pomocą działań na obiektach geometrycznych. Ten właśnie postulat nazywany jest programem Leibniza.

Nikt się jednak nie kwapił z realizacją tego programu. Metoda kartezjańska była gotowa i pełnosprawna, zaś pomysł Leibniza miał tę wadę, że nawet nie wskazywał kierunku poszukiwań owych działań ani nie sugerował, jakie mają być ich argumenty.

Pewną próbę realizacji opisałem w Delcie 6/1977. Podany tam system Bachmanna nie jest jednak dobrą realizacją. Argumentami działań, obiektami, o których się mówi, są ciągi prostych. Czy zaś ciąg prostych jest obiektem geometrycznym to sprawa dyskusyjna.

Można jednak ten program zrealizować niezbyt wielkim kosztem. Mam nawet propozycję dla Czytelników: opiszę niżej, jak to zrobić, a każdy uzupełni szczegóły.

Ograniczmy się do przypadku płaszczyzny. Mówić będziemy o punktach. Obierzmy dwa z nich i oznaczmy je o i e. Działań będzie trzy:

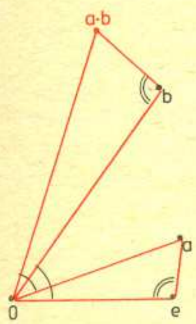


$$a+b = c$$

wtedy i tylko wtedy, gdy przesunięcie o na a przenosi b na c,

$$a \cdot b = c$$

wtedy i tylko wtedy, gdy podobieństwo spiralne (złożenie obrotu i jednokładności o tym samym środku) o środku o punktu e na punkt a przenosi b na c,

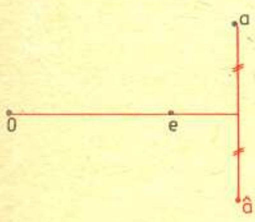


$$\hat{a} = b$$

wtedy i tylko wtedy, gdy prosta oe jest symetralną ab. No i zapraszam do pracy: należy dopracować się sposobu wyrażenia dowolnej geometrycznej zależności między punktami w języku naszych trzech działań.

Wskazówka: Dogodnie jest zacząć od przetłumaczenia na nasze działania relacji: a, b, c tworzą kąt prosty. To zaś najlepiej zacząć od szczególnego przypadku: a, o, c tworzą kąt prosty. Przypadek ogólny uzyska się stąd przez dodawanie. Mając zaś kąt prosty uzyskujemy przystawanie odcinków korzystając z tego, że prostopadłe wystawione z końców (nierównoległych) odcinków przystających przecinają się w wierzchołkach rombu (a ten ma prostopadłe przekątne). Zależność: punkt p należy do odcinka ab już łatwo uzyskać: jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki punkt q, że kąty apq, bpq i aqb są proste.

A dalej to już naprawdę łatwo.



Wyjaśnienie 1: Proponowane zajęcie jest trudne, ale naprawdę kształcące.

Wyjaśnienie 2: Gdyby punkty płaszczyzny traktować jak liczby zespolone, to nasze + i · byłyby dodawaniem i mnożeniem w ciele liczb zespolonych. Ciekawe jednak, że ciało liczb zespolonych jest zbyt słabym narzędziem do opisania płaszczyzny. Trzeba dodać coś jeszcze, np. sprzężenie — nasz ^.

Wyjaśnienie 3: Jako aksjomatykę ujętej po leibnizowsku płaszczyzny można przyjąć aksjomatykę ciała (+ i ·) z inwolucyjnym automorfizmem (^) (ta uwaga nie musi być dla wszystkich jasna, ale nie jest też bardzo ważna).

Wyjaśnienie 4: Oczywiście przedstawiona realizacja programu Leibniza nie „załatwia sprawy". Niewinne zdanie „ograniczmy się do przypadku płaszczyzny" nie może być bowiem usunięte. Wiadomo nawet (tw. Frobeniusa), że nie można takiego chwytu zastosować w geometrii trójwymiarowej.

Naczelny

O liczbach zespolonych piszemy w następnym numerze Delty.

W geometrii różniczkowej termin „obiekt geometryczny" ma ściśle określone, znacznie węższe od potocznego znaczenie. Tu termin ten jest używany w potocznym znaczeniu.