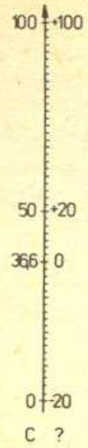
Pomiar



Mierzenie, to przyporządkowywanie przedmiotom lub zjawiskom liczb. To, jaka konkretnie liczba zostanie przypisana konkretnemu przedmiotowi, zależy od zastosowanego przyrządu pomiarowego, czy — dokładniej — od zastosowanego schematu eksperymentalnego zwanego procedurą pomiarową. Ponieważ jednak schematy eksperymentalne i wykorzystywane w nich przyrządy, a w szczególności sposób wyskalowania tych przyrządów ustalane są przez ludzi zwanych fachowcami, to przyporządkowana obiektowi liczba ma charakter bardzo umowny. Niesie ona pełną informację o wyniku pomiaru, jeśli tylko wiadomo, jaka była procedura pomiarowa.

Ale — skoro jest kwestią aż tak umowną, jaka liczba jest przyporządkowana danemu zjawisku — to można by posunąć się jeszcze dalej w tej dowolności i zaproponować do powszechnego użytku następującą skalę temperatury (prawa skala „?" na rysunku obok).

Wydaje się dziwna — to co? Przecież, gdyby wszyscy nią właśnie się posługiwali, to mogłaby służyć równie dobrze do komunikowania się, jak skala Celsjusza (czy Kelvina, na którą ostatnio usiłujemy się namówić). A miałaby niewątpliwe zalety, choćby przy mierzeniu ciepłoty ciała czy temperatury wody do kąpieli. A jednak pomysł wydaje się nierozsądny. I jest taki: spróbujmy sobie wyobrazić postać wzorów wyrażających pewne prawidłowości fizyczne (choćby równania Clapeyrona), w których temperatura miałaby być wyrażona w stopniach „?". Koszmar.

Stąd wniosek: dowolność skali, na jakiej mierzy się właściwości pewnych zjawisk czy obiektów, w praktyce nie bywa aż tak wielka, jak by się wydawało. Ograniczenia wynikają jednak nie z faktu, że wyniki pomiaru pełnić mają funkcję informacyjną, lecz stąd, że służyć one mają do możliwie prostego i wygodnego opisu rzeczywistości i zjawisk w niej zachodzących.

Nie jest przypadkiem, że wszystkie wykorzystywane współcześnie i nieco wcześniej skale temperatury (m.in. Celsjusza, Fahrenheita, Réaumura, Kelvina) mają własność następującą: od każdej skali do innej można przejść stosując przekształcenie liniowe postaci $t' = at+b$ $(a > 0)$. Wszystkie one konstruowane były tak, by w zakresie, w którym możliwe jest obserwowanie wykorzystywanego w klasycznych termometrach zjawiska termicznej rozszerzalności ciał, zjawisko to miało możliwie prosty opis teoretyczny: *przyrost długości jest wprost proporcjonalny do przyrostu temperatury.* Łatwo można wykazać, że rzeczywiście każde dwie skale spełniające ten warunek są liniowo zależne.

$K \to C$: $a = 1$ $\quad b = -273\frac{3}{20}$,

$F \to C$: $a = \frac{5}{9}$ $\quad b = -17\frac{7}{9}$,

$R \to C$: $a = \frac{5}{4}$ $\quad b = 0$.

Wyobraźmy sobie, że mamy do czynienia z dowolną skalą tego typu. Niech temperaturom x, y i z °C odpowiadają w tej skali liczby x', y' i z'. Niech określony wymiar liniowy pewnego ciała w tych temperaturach wynosi odpowiednio α, β i γ, a W i C będą odpowiednimi współczynnikami proporcjonalności dla wyobrażonej skali temperatury i skali Celsjusza. Ponieważ

$$z'-x' = W(\gamma-\alpha) \quad \text{i} \quad z'-y' = W(\gamma-\beta)$$

oraz

$$z-x = C(\gamma-\alpha) \quad \text{i} \quad z-y = C(\gamma-\beta),$$

to

$$\frac{z'-x'}{z'-y'} = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = \frac{z-x}{z-y},$$

skąd ustalając x, y, x', y' (np. $x = 0$ °C, $y = 100$ °C) z łatwością wnosimy, że z' jest liniową funkcją z.

Dajcie mi punkt oparcia, to poruszę siebie

Zauważmy, że przy okazji wykazaliśmy następującą własność pomiaru temperatury opartego na zjawisku termicznej rozszerzalności ciał: jeśli x, y, z są wartościami temperatury ciała na pewnej skali, to wyrażenie

$$\frac{z-x}{z-y}$$

jest niezmiennikiem zmiany skali — jego wartość nie zależy od wyboru skali. Pozwala nam to na przykład stwierdzić, że zdanie „*temperaturom* 20, 30 *i* 50 °F *odpowiadają temperatury* −10, 15 *i* 20 °C" jest fałszywe — choć byśmy nic nie wiedzieli o sposobie przeliczania °F na °C.

$$\frac{50-30}{50-20} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{6} = \frac{20-15}{20-(-10)}$$

Przykład ten pokazuje, że dzięki udanemu doborowi skali pomiarowej można nie tylko uzyskać prosty opis zjawiska, którego pomiar dotyczy, lecz również na drodze analizy czysto formalnej uzyskiwać pożyteczne informacje o pewnych właściwościach pomiaru. Na gruncie fizyki rzecz jest dość oczywista i zajmowanie się takimi problemami pozornie wydawać się może niezbyt celowe. Można jednak wskazać takie obszary nauki i takie zagadnienia szczegółowe, w których problemy pomiaru i konstrukcji skal odgrywają z całą pewnością rolę podstawową.

W badaniach psychologicznych dąży się między innymi do uzyskania odpowiedzi na pytania typu: „jak człowiek reaguje na docierające do niego bodźce, jak postrzega różne zjawiska otaczającego go świata, w jaki sposób podejmuje określone decyzje". Wszelkie próby uzyskiwania nie tylko jakościowego ale i ilościowego opisu zachowań ludzkich wymagają, po pierwsze, stworzenia sytuacji, w których jakikolwiek pomiar jest możliwy; po drugie zaś — dobrania takiej skali pomiarowej, by uzyskiwane wyniki stwarzały możliwość dokonywania porównań i teoretycznych uogólnień.

Weźmy dla przykładu pod uwagę rozważany w psychologicznej teorii decyzji problem postrzegania ryzyka i podejmowania ryzykownych decyzji. W laboratorium psychologicznym stworzyć można sytuację następującą: badany ma prawo wzięcia udziału w loterii (p, x), w której może wygrać x zł z prawdopodobieństwem p, lub nic — z prawdopodobieństwem $1-p$. Badany może jednak sprzedać swoją loterię eksperymentatorowi i w związku z tym proszony jest o określenie minimalnej kwoty $m(p, x)$, za jaką gotów jest odstąpić od losowania. Kwota ta może być traktowana jako wyraz wartości loterii dla badanego. Mamy tu więc do czynienia z pomiarem wartości loterii (na skali pieniężnej). Można oczekiwać, że wartość ta będzie tym większa, im wyższa wygrana i im większe prawdopodobieństwo wygranej. Teoretycznie wydawałoby się, że wartość loterii powinna być równa jej wartości oczekiwanej $px+(1-p)\cdot O = px$, a więc być iloczynem wygranej i jej prawdopodobieństwa. Wiadomo jednak, że w praktyce rzadko stosujemy się do takich zaleceń teorii: są ludzie unikający ryzyka, są tacy, co bardzo je lubią; często przeceniamy małe prawdopodobieństwa (dzięki temu mogą prosperować różne gry liczbowe), czasem nie doceniamy dużych; te same 100 zł ma zupełnie inną wartość przed i po pierwszym. Trudno więc oczekiwać, że badany będzie oceniał wartość loterii (p, x) na px zł. Jednakże sugestia uzyskania takiego opisu oceny wartości, w którym wartość byłaby iloczynem subiektywnej oceny szans wygranej i oceny wartości samej wygranej, jest — ze względu na swą prostotę — pociągająca. Powstaje więc problem: czy i kiedy można tak przeskalować niemalejącą funkcją φ pieniężnej oceny wartości, by istniały funkcje $P(p)$ i $X(x)$ (reprezentujące subiektywne oceny p i x), by dla przeskalowanych ocen wartości loterii

$$M(p, x) \overset{\mathrm{df}}{=} \varphi[m(p, x)]$$

spełniony był warunek

$$M(p, x) = P(p)\cdot X(x). \tag{*}$$

A to już jest problem z zakresu matematyki. Choć sam w sobie mało interesujący (rozwiązuje się w każdym przypadku prosto „na piechotę"), to daje się uogólniać na różne sposoby, a rozwiązania niektórych uogólnień prowadzą do bardzo interesujących wniosków, dających się interpretować empirycznie. W szczególności zaś pozwalają konstruować niezmienniki przeskalowań. Okazuje się na przykład, że jeśli w ocenianych loteriach prawdopodobieństwa wypełniają przedział $\langle 0, 1\rangle$ (w praktyce: układają się w nim dość gęsto) i istnieje choć jedna skala wartości M spełniająca (*), to każda inna skala $\tilde{M}$ spełnia (w praktyce: w przybliżeniu) równość $\tilde{M} = a\cdot M^b$ $(b > 0)$, skąd wynika, że dla dowolnej trójki loterii iloraz

$$\frac{\log M(p, x)-\log M(q, y)}{\log M(p, x)-\log M(r, z)} \tag{**}$$

jest niezmiennikiem w klasie skal spełniających (*). A to stwarza dalsze możliwości. Przypuśćmy, że u dwu różnych badanych dla każdej trójki loterii ilorazy (**) mają te same wartości. Oznacza to, że skale M u tych osób nie różnią się bardziej niż dwie różne skale tej samej osoby: należy więc uznać, że osoby te tak samo postrzegają układ loterii. Zupełnie nieoczekiwanie możliwe staje się tu odpowiedzialne porównywanie subiektywnych odczuć różnych osób — oczywiście tylko w bardzo ograniczonym sensie: w konkretnym badaniu eksperymentalnym i w odniesieniu do bardzo specyficznych obiektów.

Przykład ten pokazuje, jak pożyteczne, owocne i niekoniecznie banalne mogą okazywać się próby formalnego postawienia i rozwiązania problemu: tak dobrać skalę pomiarową, by opis zjawiska był możliwie prosty. Problemami tego typu zajmuje się *teoria pomiaru*, która jest w gruncie rzeczy jeszcze jednym owocnym zastosowaniem matematyki.

Matematyk

Rozwiązanie zadania F 50.
Weźmy pod uwagę element powierzchni powłoki Δs. Element ten ma masę

$$m_1 = \frac{m}{4\pi R^2}\Delta s.$$

Obliczmy, z jaką siłą element ten jest przyciągany przez pozostałą część powłoki. W tym celu rozpatrzmy sytuację pokazaną na rysunku. Zgodnie z podanymi oznaczeniami mamy:

$$\Delta = 2R\cos\varphi$$
$$r = R\sin 2\varphi = 2R\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\mathrm{d}(2\varphi) = 2\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}S = 2\pi r\cdot R\cdot \mathrm{d}(2\varphi) = 8\pi R^2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}m = \frac{m}{4\pi R^2}\mathrm{d}S.$$

Zatem $\mathrm{d}F = \dfrac{\mathrm{k}m_1\mathrm{d}m}{4\pi\Delta^2}\cos\varphi.$

gdzie k oznacza stałą grawitacji. Podstawiając tu obliczone wyżej wartości dm oraz Δ i całkując względem φ od 0 do $\pi/2$ dostajemy

$$F = \frac{\mathrm{k}mm_1}{4\pi\cdot 2R^2} = \frac{\mathrm{k}m^2}{32\pi^2R^4}\Delta s.$$

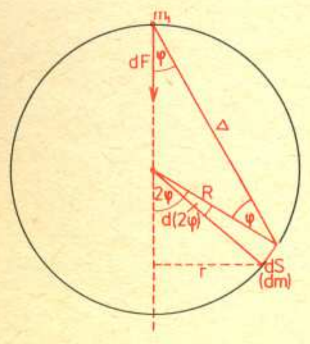
Warto zwrócić uwagę na dwójkę występującą w mianowniku $(2R^2)$. Gdyby masa m_1 leżała tylko nieco na zewnątrz powłoki, a nie akurat na niej, dwójki tej by nie było i powłoka działałaby tak, jak punkt materialny.
Z ostatniego wzoru wynika, że wzajemne oddziaływanie grawitacyjne poszczególnych punktów powłoki jest równoważne działaniu na powłokę pewnego zewnętrznego ciśnienia równego

$$p = \frac{F}{\Delta s} = \frac{\mathrm{k}m^2}{32\pi^2R^4}.$$

Wobec tego siła, z jaką przyciągają się obydwie części powłoki, powinna równać się parciu na powierzchnię rozdzielającą te części:

$$P = pS = \frac{\mathrm{k}m^2}{32\pi^2R^4}\pi(R^2-h^2),$$

$$P = \frac{\mathrm{k}m^2}{32\pi R^2}\left(1-\frac{h^2}{R^2}\right).$$



Zob. np. Kranz, Luce, Suppes, Tversky: Foundations of measurement [Podstawy pomiaru], New York 1971, lub Coombs, Daves, Tversky: Wprowadzenie do psychologii matematycznej, Warszawa 1977.