Rozważania na temat liczby e

Mgr inż. Jacek CHLIPALSKI

Pamięci prof. dr Zdzisława Opiala poświęcam tę publikację

Zbiór liczb rzeczywistych zawiera, jak wiadomo, nieskończoną ich ilość, wśród nich najbardziej znane są liczby naturalne; te — można powiedzieć — są najstarsze, gdyż bez ich znajomości nasi praojcowie nie mogliby policzyć stada swoich owiec czy też wojowników idących w bój. W miarę rozwoju ludzkości zaczęto używać liczb ułamkowych i ujemnych, zaś z chwilą pojawienia się początków algebry musieliśmy wprowadzić liczby niewymierne.
Cofnijmy się do prehistorii. Ówcześni (inżynierowie?) wpadli na pomysł, że podłożenie pod blok skalny okrągłego pnia drzewa niewspółmiernie ułatwia jego transport. Potem okazało się, że odpowiednio obrobiony ten pień w postaci prymitywnego koła może znaleźć zastosowanie przy budowie pojazdów. Tak powstało jedno z największych odkryć starożytności, jakim jest koło. W miarę rozwoju cywilizacji przypuszczalnie pierwsi uczeni zaczęli zajmować się właściwościami koła. Powstało pojęcie średnicy, promienia, obwodu itp. Wiemy, że np. Archimedes ustalił na drodze doświadczalnej, że stosunek obwodu do podwójnego promienia wynosi $3\frac{1}{7}$. Na temat koła można pisać wiele i snuć bardziej lub mniej realne rozważania, czego przykładem była tzw. „kwadratura koła". Na przestrzeni wieków wytworzono pojęcie liczby π, by następnie udowodnić, że jest ona przestępna, czyli że nie może być pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych. Jest ona związana z kołem, jego podstawowymi wielkościami, pomiarami kątów, funkcjami związanymi z nim (jak trygonometryczne i cyklometryczne itd.). W szkole zaczyna uczniom „towarzyszyć" od prawie pierwszych klas, przez maturę i studia techniczne, by później w czasie pracy zawodowej towarzyszyć już na stałe. Liczba π wydaje się być czymś bardzo oczywistym, takim jak jest koło. Na tym kończę zbyt długie rozważania na jej temat — może będą one pomocne do zrozumienia tego, co według mnie jest niezrozumiałe.
Pierwsze spotkanie z liczbą „e" w zależności od programu szkolnego może nastąpić jeszcze przed maturą, albo dopiero w czasie kursu matematyki wyższej na studiach techniczno-przyrodniczych (ja osobiście zetknąłem się z nią dopiero na wyższych studiach). W zasadzie, przy „przerabianiu" logarytmów jest możliwość, by nauczyciel wspomniał o tym, że oprócz najbardziej rozpowszechnionych logarytmów o podstawie 10 mogą istnieć logarytmy o innej podstawie będącej liczbą naturalną, a także o bardzo „dzikiej" — niezrozumiałej, tj. o 2,71.... Mogłoby się wydawać, że to „niewydarzone dziecko" w porównaniu do logarytmów dziesiętnych skazane będzie na upośledzenie (przysłowiowy kopciuszek), ale, jak dalej się okaże, te „dziesiętne" zawdzięczają swoje powstanie „kopciuszkowi".
Pierwsze moje zetknięcie się z liczbą „e" nastąpiło na wykładach, gdzie omawiane były ciągi i szeregi. Na ćwiczeniach przedstawiono nam charakterystyczne wyrażenia:

a) ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

b) szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Obliczenie przybliżonej wartości sumy szeregu nie było trudne, chwila rachowania wykazała, że suma jego wynosi około 2,72. Przykład z ciągiem wprowadził nas w pełne zakłopotanie, bo jak sądziliśmy, granicą tą powinno być 1. Ale gdy skorzystamy z dwumianu Newtona lub zastosujemy dla przybliżonych obliczeń metody logarytmiczne, okaże się, że otrzymamy liczbę 2,7182... czyli e. Otóż w trakcie obliczeń rachunkowych tą czy inną metodą otrzymamy wartość e z pewnym przybliżeniem. Dla matematyka nie istnieje przybliżenie — to jest dobre dla technika lub astronoma — dla niego istnieje tylko liczba e. Mogłoby się wydawać, że gdy „przerobimy" ciągi i szeregi, w których występuje liczba e, będzie spokój.

Przypomnijmy, że sumą szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots$ nazywamy granicę ciągu (s_n), $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$.
Udowodnimy, że ciągi (a_n) i (s_n), gdzie $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ są zbieżne — i to do tej samej granicy, a więc że granica ciągu a) równa jest sumie szeregu b).
W dowodzie dwukrotnie skorzystamy z twierdzenia orzekającego, że *jeśli ciąg liczbowy jest rosnący i ograniczony z góry, to jest zbieżny.*

Ciąg (s_n) jest rosnący, bo $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} > s_n$; jest on też ograniczony z góry, bowiem dla wszystkich $k > 0$ spełniona jest nierówność $k! \geqslant 2^{k-1}$, z której wynika, że

$$s_n = 1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!} \leqslant 1+\frac{1}{2^0}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+2 = 3.$$

Jest więc zbieżny.
Rozwińmy a_n wg wzoru Newtona:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\dots+\frac{1}{k!} \times \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} + \dots + \frac{1}{n!} \times \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n^n},$$

skąd

$$(*)\ a_n = 1+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Podobnie

$$(**)\ a_{n+1} = 1+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{(n+1)!} \times \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Spośród $n+1$ pierwszych składników prawej strony (*) każdy jest niewiększy od odpowiedniego składnika prawej strony (**); ponadto w (**) występuje dodatni $(n+2)$-gi składnik, który nie ma swego odpowiednika w (*). Zatem $a_{n+1} > a_n$ i ciąg (a_n) jest rosnący. Jednocześnie zaś z (*) wnioskujemy, że $a_n < 1+\dots+\frac{1}{k!}+\dots+\frac{1}{n!} = s_n < 3$, zatem (a_n) jest również ograniczony z góry — a więc jest zbieżny.
Przy tym ostatnia nierówność orzeka, że $a_n < s_n$, skąd wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n$.
Aby udowodnić równość granic obu ciągów wystarczy więc wykazać, że zachodzi nierówność przeciwna: $\lim a_n \geqslant \lim s_n$.

W tym celu weźmy ustalone k i dowolne $n > k$. Z (*) wynika, że

$$a_n > 1 + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

(po prawej stronie pozostawiliśmy tylko $k+1$ pierwszych składników). Przy $n \to \infty$ każde z wyrażeń w nawiasach okrągłych dąży do 1, zatem

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 1 + \ldots + \frac{1}{k!} = s_k$$

(przy dowolnym k). Ponieważ ciąg (s_k) jest zbieżny, to możemy po prawej stronie przejść do granicy przy $k \to \infty$. Otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{k\to\infty} s_k,$$

a więc to, o co chodziło. Ostatecznie $\lim a_n = \lim s_n$, czyli

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

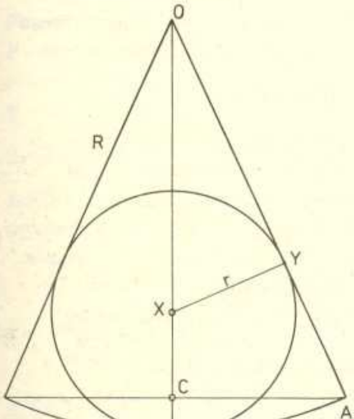
Zatem zarówno ciąg a) jak i szereg b) definiują tę samą liczbę.

Można też podać inną jeszcze definicję liczby e: jest to jedyna liczba rzeczywista a spełniająca nierówność

$$a^x > 1 + x$$

dla wszystkich rzeczywistych $x \neq 0$ (zob. W. Sierpiński, *Działania nieskończone*, ss. 133—137).

Rozwiązanie zadania M 145. Stosujemy oznaczenia takie jak na rysunku.



Trójkąty OXY i OAC są podobne i $OX = R - r$, a więc $\frac{XY}{XO} = \frac{AC}{OA}$, czyli $\frac{r}{R-r} = \frac{a}{R}$.

Przekształcając ostatnią równość otrzymujemy kolejno:

$$rR = aR - ar,$$
$$rR + ar = aR,$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r}, \text{ c.n.d.}$$

Ale nie — pojawi się ona znowu przy omawianiu funkcji elementarnych, a dokładniej — funkcji wykładniczej typu a^x, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Matematycy wprowadzili tutaj liczbę e i otrzymali funkcję wykładniczą e^x. Wiadomym jest, że odwrócenie funkcji wykładniczej daje nam funkcję logarytmiczną i tak otrzymaliśmy logarytm o podstawie e, który zapisywany jest jako $\ln a$.

I oto wchodzimy w rachunek różniczkowy i całkowy. Okazuje się, że funkcja wykładnicza e^x ma pochodną równą funkcji e^x. Przy całkowaniu otrzymujemy to samo: otrzymana funkcja pierwotna równa się wyrażeniu podcałkowemu (z dokładnością do stałej[1]). Liczba e opanowuje prawie cały rachunek różniczkowy i całkowy, panuje prawie niepodzielnie w równaniach różniczkowych, na niej w dużym stopniu opiera się rachunek prawdopodobieństwa i teoria błędów. Podobnie wygląda sprawa z teorią funkcji analitycznych, gdzie e „łączy" świat liczb zespolonych z liczbami rzeczywistymi[2].

Ze świata równań różniczkowych wkracza do teoretycznych problemów techniki, wspomnę tu tylko o rachunku operatorowym, elektrotechnice, teorii wymiany ciepła, hydrologii wód gruntowych. Można powiedzieć, że obejmuje swoim zasięgiem wszystko, począwszy od głębin ziemi i oceanów, a skończywszy na mechanice rządzącej ruchem ciał niebieskich.

Szczególnie liczba e z ujemnym wykładnikiem e^{-xk} $(k, x > 0)$ występuje w tych wzorach, które obejmują zanikające w czasie zjawiska fizyczne, czego przykładem będzie wzór na rozpad pierwiastka promieniotwórczego, rozładowanie kondensatora w obwodzie prądu stałego, zanikanie prądu i powstawanie siły elektromotorycznej wynikające z praw samoindukcji w obwodzie prądu zmiennego i stałego w przypadku występowania indukcyjności własnej, procesy wymiany ciepła (stygnięcia), gdy temperatura jakiegoś ciała w sposób asymptotyczny zbliża się do temperatury otoczenia itd.

Także i stosunkowo elementarny wzór obejmujący procent składany powiązany jest z liczbą e.

A teraz możemy sobie zadać pytanie, jaką drogą dochodzimy do „dokładnej" jej wartości. I tu matematyka wyższa daje od razu odpowiedź. Korzystamy tu z szeregów potęgowych Taylora, które to z dowolnie żądaną dokładnością (i to bez komputerów) umożliwiają obliczenie dowolnie dokładnego przybliżenia wartości e^x jak też $\ln x$ — gdzie w przypadku logarytmów $x > 0$. I tutaj znajdziemy odpowiedź na pytanie, jaki jest cel stosowania logarytmów naturalnych, tj. o tak dziwnej podstawie? Dzięki nim jesteśmy w stanie z dowolną dokładnością obliczyć wartości logarytmów dziesiętnych stosując metodę znaną jeszcze ze szkoły średniej[3].

Jak się dalej potoczyły losy „mojej" liczby e?

Po ukończeniu studiów na Politechnice Warszawskiej (tutaj wspomnę, że moim nauczycielem akademickim był prof. Edward Otto, który swoimi pięknymi wykładami z matematyki ugruntował moje zainteresowanie tym przedmiotem) zacząłem się zajmować w wolnych chwilach z amatorstwa wybranymi dziedzinami matematyki i za cel postawiłem sobie wyjaśnienie wątpliwości związanych z liczbą e, a głównie — skąd się ona wzięła.

Swoje kroki zacząłem kierować na popularne odczyty organizowane przez PTM. Obejmowały one różne tematy, ale nigdy nie dotyczyły liczby e. Pamiętam takich prelegentów, jak niezapomnianej pamięci prof. prof. W. Sierpiński, A. Mostowski, a z żyjących prof. prof. Otto, Schinzel, Turski, Żakowski i wielu innych. Ponieważ temat nigdy nie dotyczył liczby e, więc o jej genezę mogłem w zasadzie pytać się prelegenta po odczycie. Odpowiedź na ogół była podobna: „posiada takie a takie właściwości w rachunku różniczkowym, ale kto ją pierwszy odkrył i jaka jest geneza jej powstania tego nie wiem; rozumiem całkowicie o co pytającemu chodzi, ale to już sprawa historii matematyki" itp. W roku 1968 jeden z prelegentów zaproponował, abym zwrócił się bezpośrednio do jedynego historyka matematyki, który w tym czasie był w kraju, tj. prof. Z. Opiala z Krakowa.

Na zakończenie moich może przydługich wywodów z żalem przypominam, że mój Szanowny Informator, z którym osobiście miałem przyjemność rozmawiać już po otrzymaniu odpowiedzi, chcąc mu podziękować za trud jaki sobie zadał odpisując na mój list, jak też wysoce życzliwe potraktowanie interesującego mnie problemu, zmarł w Krakowie 27 lipca 1974 r.

Niech te rozpoczęte przeze mnie rozważania na temat historii powstania liczby e przyczynią się chociaż w skromnym stopniu do uczczenia pamięci zmarłego prof. Z. Opiala.

(1) Zob. np. K. Kuratowski, *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego*

(2) Rolę e jako tego łącznika opisuje wzór Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\quad \varphi \in R.$$

(3) $\log x = \log e \cdot \ln x$, $\log x \overset{\text{df}}{=} \log_{10} x$, $\ln x \overset{\text{df}}{=} \log_e x$.

Warszawa 13 XII 1968 r.
Wielce Szanowny Panie Profesorze!
Najmocniej przepraszam, że nie znając Pana osobiście zwracam się bezpośrednio do Pana; na swoje usprawiedliwienie muszę podać, że upoważnili mnie Prelegenci prowadzący odczyty popularne z matematyki w ramach działalności PTM.
Od blisko 15 lat staram się nie opuścić żadnego z odczytów, jakie co roku odbywają się w Warszawie. Matematyka interesuje mnie bardzo, a szczególnie jej historia. Zawód mój obecny nie wymaga na ogół wyższej matematyki, zaś istniejące pomoce, jak tablice, nomogramy itp., sprowadzają znajomość matematyki do jakiegoś minimalnego poziomu (jestem st. projektantem z dziedziny instalacji sanitarno-przemysłowych w Biurze Projektów w Warszawie). [...] Chodzi mi o historię liczby e, jak do tej „dzikiej i tajemniczej liczby" doszli pierwsi matematycy (Neper).
[...] Znana mi chronologia liczby e jest następująca: w roku 1614 Neper w dziele *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* wspomina o niej układając tablice logarytmów przy podstawie $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ i wprowadza pojęcie niezbyt zrozumiałe jak: Nep $\lg y = 161\,180\,957 - 10^7 \ln y$,
Nep $\ln 1 = 161\,180\,957$.
W roku 1728 granicę ciągu $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oblicza Daniel Bernoulli, zaś w 1736 Euler oblicza sumę szeregu $\sum \frac{1}{n!}$.
W roku 1873 Ch. Hermite udowadnia przestępność liczby e. Właściwy rachunek różniczkowy powstaje pod koniec XVII wieku, tak że odkrycie liczby e nie mogło powstać wg mnie z poszukiwaniami funkcji równej swojej pochodnej. [...] Będę Panu Profesorowi wielce zobowiązany za pomoc i udzielenie mi odpowiedzi na podany problem. Przy najbliższej obecności mojej w Krakowie podziękuję osobiście. Przepraszam serdecznie za kłopot.
Z poważaniem *J. Chlipalski*

Kraków, dnia 19 grudnia 1968 r.
Szanowny Panie!
Od razu na wstępie należy zaznaczyć, że ma Pan najzupełniej rację. Ani Neper, ani nikt inny z jego okresu nie mógł wpaść na liczbę e stawiając problem znalezienia funkcji równej swojej pochodnej. Tak można było stawiać problem dopiero po ugruntowaniu rachunku różniczkowego i całkowego. Ale i wtedy liczba e, jako podstawa logarytmów naturalnych, raczej wiązana była z całkowaniem funkcji $\frac{1}{x}$ niż z problemem funkcji równej swojej pochodnej. Po prostu tak bywało i bywa w historii matematyki, że to co nam wydaje się proste, naturalne i oczywiste nie bardzo pokrywa się z faktami historycznymi. Po to zresztą jest dyscyplina naukowa pod nazwą historia nauki, by wszystkie subtelności (a tych jest bardzo dużo) rozwoju nauki wyjaśniać i z właściwej strony oświetlać.

Pozostaje więc wyjaśnić, w jaki sposób Neper doszedł do liczby e. Odpowiedź jest bardzo prosta. Wcale nie doszedł. Po pierwsze, ani u Bürgiego (w pewnej mierze prekursora Nepera), ani u samego Nepera nie ma pojęcia podstawy logarytmów. Jest to pojęcie, które wprowadzono znacznie dopiero później. Po drugie, nie odpowiada prawdzie twierdzenie, że u Nepera czy Bürgiego mamy do czynienia z logarytmami naturalnymi, to znaczy przy podstawie e.
Prawdą jest natomiast, że jeżeli popatrzeć na pierwsze próby Nepera i Bürgiego ze współczesnego punktu widzenia, to można w nich odkryć pewne ślady prowadzące na trop liczby e, ale tylko ślady — nic więcej. I tu, jeżeli chcemy wyjaśnić zagadkę, czeka nas pełna niespodzianka.
U jednego i drugiego związki logarytmów z liczbą e miały charakter czysto rachunkowy i przypadkowy. Postaram się rzecz wyjaśnić na przykładzie prób Bürgiego, bo u niego związki te są nieco jaśniejsze.
W pewnej mierze idea logarytmów była znana już nawet Archimedesowi, który w pełni zdawał sobie sprawę ze związku między postępem arytmetycznym
$0,1,2,3,4,5,\ldots$
i postępem geometrycznym
$1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots$
Dopiero jednak pod koniec XVI wieku udało się matematykom europejskim wykorzystać ten związek do celów uproszczenia rachunków. Między innymi dlatego, że bardzo zręcznie udało im się uprościć, przez odpowiedni dobór liczby a, sprawę kolejnych potęgowań tej liczby. Oto jak poradził sobie z tym Bürgi.
Jeżeli przyjąć $a = 1+10^{-4}$, to w drugim z tych ciągów każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie go z przecinkiem przesuniętym o cztery miejsca w lewo.
Symbolicznie $a_{n+1} = a_n + a_n 10^{-4}$.
I w ten sposób żmudne potęgowanie czy mnożenie natychmiast zamienia się w dodawanie.
W konsekwencji, kolosalnie upraszcza się sporządzanie „tablic" logarytmów. I to jest cały wynalazek Bürgiego.

Patrząc na to ze współczesnego punktu widzenia, można powiedzieć, że w ten sposób Bürgi wprowadził logarytmy przy podstawie

$$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000},$$

a to jest już dość dobre przybliżenie liczby e.

Powtarzam więc jeszcze raz. U Bürgiego związek jego logarytmów z liczbą e ma charakter rachunkowy, co zresztą wcale nie umniejsza rangi jego pomysłu. Podobnie jest i u Nepera. Mam nadzieję, że te kilka moich uwag pozwoli Panu na rozwianie tych wątpliwości, jakie łączyły się Panu z historią liczby e. Jeżeli potrzebne byłyby jakieś inne, dalsze wyjaśnienia, to z przyjemnością podzielę się nimi z Panem.

Łączę najserdeczniejsze pozdrowienia

Zdzisław OPIAL

Wiele procesów w przyrodzie można z dobrym przybliżeniem opisać równaniem różniczkowym, którego rozwiązanie zawiera funkcje wykładnicze typu $y = Ae^{Bx}$, gdzie A i B są stałymi. Przyjrzyjmy się bliżej tabelce, w której zamieszczono dla przykładu wartości, jakie przybiera funkcja $y = e^{-ax}$ dla różnych argumentów x i dla kilku wartości parametru a. Widač, że dobierając odpowiednio parametr a można opisywać bardzo szybkie jak i powolne zmiany obserwowanej wielkości fizycznej w zależności od badanej zmiennej. Dlatego, nawet w tych przypadkach gdy mechanizm zjawiska nie jest znany, sprawdza się bardzo często, czy zależność wykładnicza opisuje obserwowane zmiany wielkości fizycznej. Jeżeli bowiem uda się przybliżyć dane doświadczalne zależnością wykładniczą, można wtedy wnioskować o mechanizmie zjawiska. A oto kilka praktycznych przykładów zastosowań funkcji wykładniczej do opisu procesów fizycznych.

1. Cumowanie łodzi do słupka

$$F = Pe^{\mu\varphi}$$

F — siła z jaką łódź ciągnie linę
P — siła z jaką żeglarz trzyma swobodny koniec liny
μ — współczynnik tarcia liny o słupek
φ — kąt opasania słupa.

2. Ruch w ośrodku lepkim (przy małych prędkościach)

Jeżeli w chwili $t = 0$ ciało o masie m ma prędkość v_0, to po czasie t prędkość ta zmaleje do prędkości v

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

k — współczynnik proporcjonalności zależny od kształtu ciała i lepkości cieczy.

3. Pochłanianie światła w ośrodku przezroczystym

Natężenie światła przechodzącego przez ośrodek maleje wykładniczo z przebytą drogą x:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

I_0 — natężenie początkowe
α — współczynnik absorpcji.

4. Rozkład Maxwella

Rozkład wartości bezwzględnej prędkości v cząsteczki gazu znajdującego się w temperaturze bezwzględnej T opisuje zależność

$$f(v) = \frac{4}{\pi^{1/2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}} v^2 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}$$

zwana rozkładem Maxwella.
m — masa cząsteczki
k — stała Boltzmanna.

$y = e^{-ax}$

x \ a	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001
1	0.3679	0.4493	0.5488	0.6703	0.8187	0.9048	0.9900	0.9990
2	0.1353	0.2019	0.3012	0.4493	0.6703	0.8187	0.9802	0.9980
3	0.0498	0.0907	0.1653	0.3012	0.5488	0.7408	0.9704	0.9970
4	0.0183	0.0408	0.0907	0.2019	0.4493	0.6703	0,9608	0.9960
5	0.0067	0.0183	0.0498	0.1353	0.3679	0.6065	0.9512	0.9950
6	0.0025	0.0082	0,0273	0.0907	0.3012	0.5488	0.9418	0.9940
7	0.0009	0.0037	0.0150	0.0608	0.2466	0.4966	0.9324	0.9930
8	0.0003	0.0017	0.0082	0.0408	0.2019	0.4493	0.9231	0.9920
9	0.0001	0.0007	0.0045	0.0273	0.1653	0.4066	0.9139	0.9910
10	$4.5 \cdot 10^{-5}$	0.0003	0.0025	0.0183	0.1353	0.3679	0.9048	0.9900

5. Stygnięcie

Różnica temperatur między stygnącym ciałem a otoczeniem maleje wykładniczo z czasem t.

$$\Delta T = (T_1 - T_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$(T_1 - T_0)$ — początkowa różnica temperatur
τ — stała charakteryzująca warunki stygnięcia.

6. Rozładowanie kondensatora przez opór

$$u = u_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

u, u_0 — różnice potencjałów na okładkach kondensatora w chwili t i $t_0 = 0$
R — opór
C — pojemność.

7. Rozpad substancji promieniotwórczej

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$N(t)$ i N_0 — odpowiednio ilość jąder pierwiastka promieniotwórczego po czasie t i w chwili $t = 0$
τ — czas rozpadu.