Liczba π — wielki symbol geometryczny

Jerzy ZARAKOWSKI

W momencie pisania artykułu Autor był uczniem ostatniej klasy LO w Żyrardowie.

Jak zapewne orientują się wszyscy Czytelnicy Delty, symbol π oznacza w matematyce stosunek długości okręgu do jego średnicy. Po raz pierwszy został on użyty w 1706 roku przez angielskiego matematyka Williama Jonesa w jego dziele pod tytułem Synopsis Palmariorum Matheseos. W powszechnym użyciu znajduje się dopiero od połowy XVIII wieku po wydaniu Analizy Eulera. Samo jednak zagadnienie, choć bez symbolicznego oznaczenia, istniało już od 4000 lat. Badacze słynnej piramidy Cheopsa zauważyli, że stosunek sumy dwóch boków podstawy do wysokości piramidy wyraża się liczbą 3,1416, czyli jest równy π z dokładnością do czterech cyfr po przecinku. Słynny papirus Ahmesa, najstarszy „podręcznik" matematyczny powstały 2000 lat p.n.e., podaje następujący sposób budowy kwadratu, którego pole równe jest polu danego koła „Odrzuć od średnicy jej część dziewiątą i zbuduj kwadrat o boku równym pozostałej części, będzie on równoważny z kołem". Pole koła jest równe πr^2. Bok kwadratu ma być równy $2r-\frac{2r}{9}=\frac{16}{9}r$, a więc jego pole wynosi $\left(\frac{16}{9}r\right)^2=\frac{256}{81}r^2$. Według podanej konstrukcji ma być: $\pi r^2=\frac{256}{81}r^2$ czyli $\pi=\frac{256}{81}$, a w przybliżeniu $\frac{256}{81}\approx 3{,}1605$. Tak więc budowniczowie piramidy Cheopsa byli lepszymi matematykami od Ahmesa. Niektóre wyrażenia dla π są szczególnie ciekawe, oto kilka z nich:

Ptolemeusz podaje taką wartość: $\pi=3+\frac{8}{60}+\frac{30}{3600}=3{,}141(6)$, Bhâskara, słynny matematyk hinduski: $\pi=\frac{3927}{1250}=3{,}1416$, Al Chwarizmi (rok 830): $\pi=$ $=\sqrt{10}=3{,}1623\ldots$, Metius (rok 1585): $\pi=\frac{355}{113}=3{,}141593\ldots$,

Francuski matematyk Viète (rok 1579): $\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\ldots$

Angielski matematyk Wallis (rok 1656): $\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}$; $n\in N$.

Jeszcze ciekawszy jest jego ułamek łańcuchowy: $\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}$

Oto wiersz matematyka, Kazimierza Cwojdzińskego:

3 1 4
Kuć i orać
1 5 9
w dzień zawzięcie
2 6
bo plonów
5 3 5
niema bez trudu!
8 9 7
Złocisty szczęścia okręcie,
9
kołyszesz...
3
Kuć!
2 3 8 4
My nie czekajmy cudu.
6
Robota
2 6 4
to potęga ludu.

Zapewne niektórzy Czytelnicy zwrócą uwagę na pisownię wyrazu *niema*, dopatrując się błędu ortograficznego. Trzeba jednak pamiętać, że według dawnej pisowni (współczesnej Cwojdzińskiemu zwrot: niema — w znaczeniu: brak — pisał się łącznie.

Aby dać pewne rozeznanie co do dokładności przedstawionych tu wartości liczby π, podam jej dosyć dokładną wartość: $\pi=3{,}14159265358979323846264338327\ldots$.

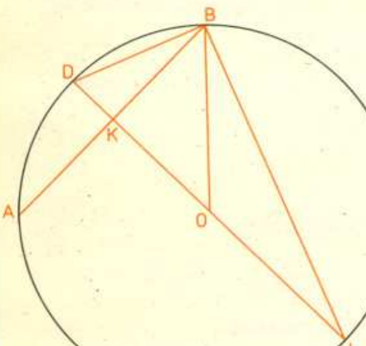
Obecnie przy pomocy maszyn elektronowych obliczono już 100 000 cyfr po przecinku. Zapamiętanie kilkunastu pierwszych cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π nie jest sprawą łatwą, lecz tutaj z pomocą matematyce przychodzi poezja. Znane są wiersze, które bardzo prosto rozwiązują ten problem. Otóż licząc litery w poszczególnych wyrazach otrzymujemy kolejne cyfry liczby π.

Sposób I:

Opieramy się na twierdzeniu, mówiącym że długość okręgu jest proporcjonalna do średnicy. Oznaczmy:

długość okręgu — C
średnica — $2r$
współczynnik proporcjonalności — h

Aby ustalić — przynajmniej przybliżoną — wartość współczynnika h, postępujemy w następujący sposób:



Niech będzie dany okrąg o promieniu r. Zauważmy, że pomiędzy bokiem a_n wielokąta foremnego wpisanego w koło a bokiem a_{2n} wielokąta foremnego wpisanego w to samo koło o podwojonej liczbie boków daje się ustalić pewna zależność. Z trójkąta prostokątnego DBL mamy: $DB^2=DL\cdot DK$, czyli $a_{2n}^2=2r\cdot DK$, ponieważ $DK=DO-KO=r-KO$, a z trójkąta prostokątnego BOK mamy

$KO=\sqrt{BO^2-KB^2}=\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}$. Więc $DK=r-KO=r-\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}$,

czyli $a_{2n}^2=2r\cdot DK=2r\left[r-\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}\right]$. Więc ostatecznie $a_{2n}=\sqrt{2r\left[r-\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}\right]}$

Przypuśćmy, że promieniem danego okręgu jest $r=1$. Wtedy wyżej ustalona zależność przybiera postać: $a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$

Przypuśćmy, że pierwszy z wpisanych w okrąg wielokątów jest sześciokątem foremnym; mamy wówczas:

$a_6 = 1,\ p_6 = 6 = 3 \cdot 2,\ p_n$ — obwód n-kąta.

Korzystając z równości (1) obliczamy $p_{12} = 12 \cdot a_{12} = 12 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4-1}} = 2 \cdot 3{,}10563\ldots$

Podobnie obliczamy $p_{24} = 24 \cdot a_{24} = 24 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_{12}^2}} = 2 \cdot 3{,}13263\ldots$

Postępując w podobny sposób dalej, mamy kolejno:

$p_{48} = 48 \cdot a_{48} = 48 \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_{24}^2}} = 2 \cdot 3{,}13935\ldots$

$p_{96} = 2 \cdot 3{,}14103\ldots$

$p_{192} = 2 \cdot 3{,}14145\ldots$

$p_{384} = 2 \cdot 3{,}14156\ldots$

$p_{768} = 2 \cdot 3{,}14158\ldots$

$p_{1536} = 2 \cdot 3{,}14159\ldots$

itd.

Ponieważ p_{2n} dąży przy $n \to \infty$ do długości okręgu, a na wstępie zaznaczyliśmy, że $C = h \cdot 2r$ (gdzie r u nas jest równe 1), więc na przykładzie naszych obliczeń możemy stwierdzić, że $h \approx 3{,}1416$. Widzimy więc, że możemy wyznaczyć π z dowolną dokładnością, wykonując tylko odpowiednio dużo „kroków" przy wyliczaniu p_{2n}. Metoda ta ma jednak tę wadę, że musimy kolejno obliczać $p_6,\ p_{12},\ p_{24}$ itd., aby obliczyć np. p_{1536}.

Sposób II.

Wpiszmy w okrąg o promieniu 1 n-kąt foremny. Dzielimy go na n trójkątów równoramiennych, a więc jego pole jest równe:

$$\frac{nr^2 \sin \dfrac{360^\circ}{n}}{2} = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}.\ \text{Stąd}\ \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \approx \pi.$$

Dobierając odpowiednio wielką wartość n, możemy znaleźć wartość π z dowolną dokładnością.

Np. dla $n = 2160$ mamy $\frac{2160}{2} \sin 10' = \pi \Leftrightarrow 1080 \cdot 0{,}0029 \approx \pi \Leftrightarrow \pi \approx 3{,}132$.

Widzimy więc, że metoda ta jest znacznie krótsza i wymaga mniej rachunków, lecz jest mniej dokładna w porównaniu z poprzednią.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 145. W wycinek koła o promieniu długości R wpisano okrąg o promieniu długości r. Cięciwa łącząca końce promieni ograniczających wycinek ma długość $2a$. Udowodnić, że $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

Rozwiązanie na str. 5

M 146. Krawędzie czworościanu wychodzące z jednego wierzchołka mają długości a, b, c i są parami prostopadłe. Wyznaczyć długość wysokości czworościanu opuszczonej z tego wierzchołka.

Rozwiązanie na str. 10

M 147. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to $8(a^3+b^3+c^3) \geqslant 3(a+b)(b+c)(c+a$

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 49. Wyznacz długość najkrótszego dnia w roku w miejscowości, w której mieszkasz. Nachylenie płaszczyzny równika względem płaszczyzny, w której leży orbita Ziemi, wynosi $\varepsilon = 23{,}5^\circ$. Szerokość geograficzną φ miejsca zamieszkania należy odczytać z atlasu.

Uwaga: Zadanie należy rozwiązać zaniedbując ugięcie i rozpraszanie promieni w atmosferze ziemskiej oraz przyjmując, że ruch Ziemi wokół własnej osi odbywa się ze znacznie większą prędkością kątową niż ruch wokół Słońca.

Rozwiązanie na str. 11