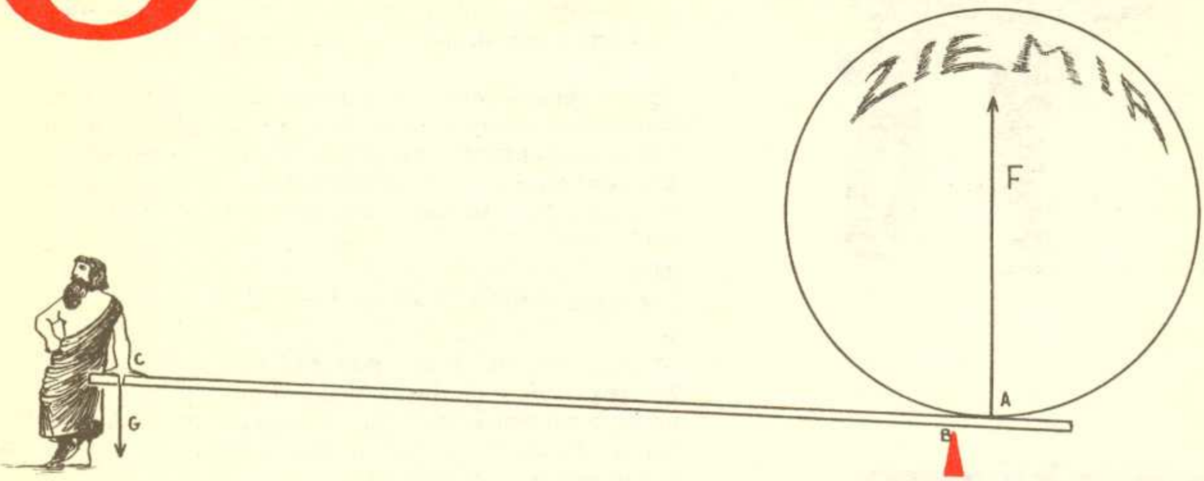
mała delta

Liczby bardzo duże zapisujemy w następujący sposób

$12 = 1{,}2 \cdot 10^1$
$120 = 1{,}2 \cdot 10^2$
$1\,200 = 1{,}2 \cdot 10^3$
$12\,000 = 1{,}2 \cdot 10^4$



LEPIEJ NIŻ SAM ARCHIMEDES

„Dajcie mi punkt oparcia, a poruszę Ziemię" — miał powiedzieć Archimedes. Rysunek wyjaśnia, w jaki sposób chciał on tego dokonać. Czy rzeczywiście wyjaśnia? Spróbujmy nad tym podyskutować. Do rozmowy możemy zaprosić *Matematyka* i *Fizyka*. Oto jak mogłaby ona przebiegać.

Matematyk

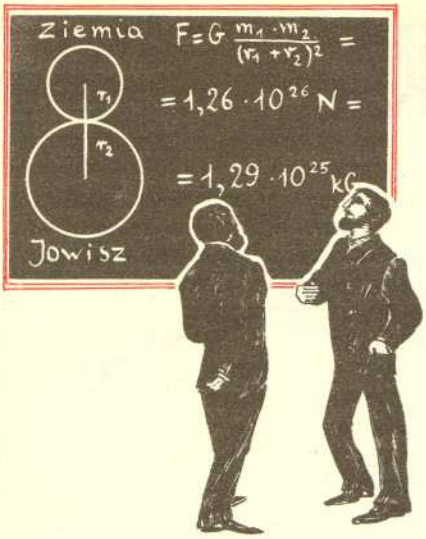
Pomysł Archimedesa, genialny w swej prostocie, ma niestety kilka poważnych wad. Oto jedna z nich. Oznaczmy, jak na rysunku, literą A punkt, w którym Ziemia wspiera się o dźwignię, oraz literą B punkt, w którym dźwignia wspiera się o punkt oparcia. Zgódźmy się, że z praktycznych względów odcinek AB powinien mieć rozsądną długość, nie mniejszą niż, powiedzmy, 1 mm. Ale wówczas cała dźwignia, jeżeli ma spełniać swoje zadanie, musi mieć monstrualną długość. Oznaczmy literą F siłę, jaką trzeba przyłożyć w punkcie A, aby poruszyć Ziemię, a literą G siłę, z jaką Archimedes będzie naciskał dźwignię w punkcie C. Na mocy znanych praw fizyki, jeżeli siły F i G mają się wzajemnie równoważyć, musi być spełniony związek

$$F \cdot AB = G \cdot BC$$

Zaproponujmy, co wydaje się sensowne, następujące wartości: $AB = 1$ mm, $F = 6 \cdot 10^{24}$ kG, $G = 10$ kG. Można więc obliczyć długość odcinka BC i całej dźwigni, co zapewne ciekawi Czytelnicy zaraz uczynią.

Fizyk

Dlaczego uważasz za sensowne przyjęcie siły F równej $6 \cdot 10^{24}$ kG. $6 \cdot 10^{24}$ kg to masa Ziemi, ale nie mamy żadnych podstaw twierdzić, że siła będzie liczbowo równa masie. Gdyby na rysunku zamiast Ziemi był zwykły ciężarek o masie 6 kg, to wiedząc, że znajdujemy się na Ziemi, moglibyśmy powiedzieć, że siła F równa się 6 kG czyli 58,8 niutonów (byłoby bezpieczniej używać niutona jako jednostki siły, 1 kG = 9,80 665 N, nie myliłyby się duże G i małe g w kG i kg). Zadanie byłoby proste. Ale Ty ani Archimedes nic nie powiedzieliście, jak umieszczony jest punkt podparcia.



M
Nie czepiaj się szczegółów. Interesuje mnie sam problem podniesienia bardzo dużej masy przy użyciu dźwigni. Mogę założyć przecież, że mam kulę wielkości Ziemi na Jowiszu i że chcę ją podnieść.

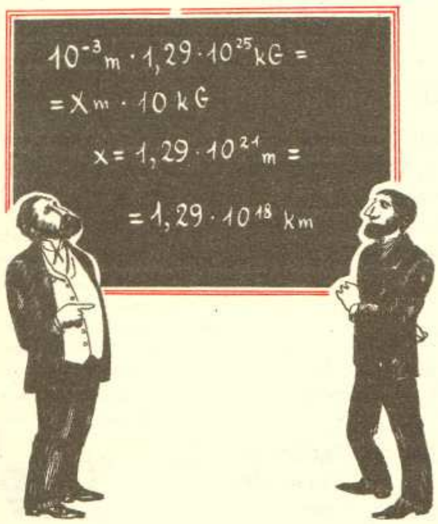
F
Ale Jowisz ...

M
Wiem, wiem. Jowisz składa się z helu i wodoru i nie będę mógł nigdzie Ziemi „położyć", ale mnie chodzi o sam problem, a nie właśnie o Ziemię i Jowisza.

F
Zgoda, chociaż wolałbym rozważać zagadnienie bardziej zbliżone do rzeczywistości. Ziemia krąży przecież po orbicie (swobodnej) i nic nie waży, tak samo jak nic nie ważą kosmonauci lecący po orbicie wokół Ziemi. Zgadzam się jednak na Jowisza. Czy wiesz, ile ważyłaby Ziemia na Jowiszu?

M
Nie wiem — to Ty powinieneś wiedzieć.

F
Mogę to obliczyć. Prawo powszechnego ciążenia mówi, że siła przyciągania dwóch mas jest proporcjonalna do iloczynu mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości. W przypadku Ziemi i Jowisza stykających się siła ta wynosi $1{,}29 \cdot 10^{25}$ kG.



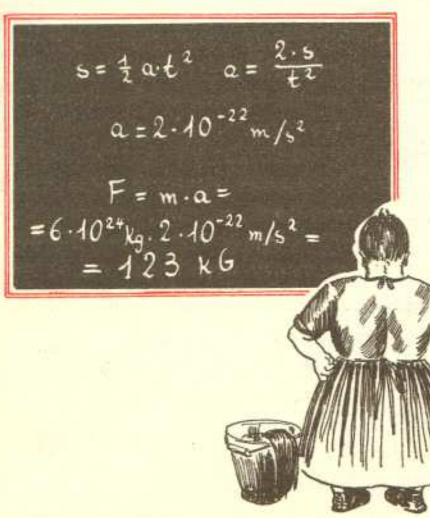
M
No więc doszliśmy do porozumienia. Mogę obliczyć, że aby podnieść Ziemię na Jowiszu, używając nacisku odpowiadającego sile 10 kG, muszę użyć dźwigni o długości $1{,}29 \cdot 10^{18}$ km.

F
Nie zgadzam się ze stwierdzeniem, że doszliśmy do porozumienia. Ostatecznie przystałbym na to, że aby zrównoważyć przyciąganie Ziemi przez Jowisza na powierzchni tej planety przy użyciu siły 10 kG, należy użyć dźwigni o długości $1{,}29 \cdot 10^{18}$ km.

M
Czy nie rozszczepiasz włosa na czworo? Jeżeli zrównoważysz siłę przyciągania, to działając tylko nieco większą siłą podniesiesz Ziemię.

F
A w jakim czasie chcesz podnieść i o ile, aby uznać, że zadanie jest wykonane?

M
Czas jest mi obojętny i zgodzę się, aby ją ruszyć tylko o 1 mm.



F
Przystaję na 1 mm, ale czas, w którym mam wykonać to zadanie, jest dla mnie bardzo ważny.

M
Dlaczego?

F
Bo może się zdarzyć, że życia nie starczy na wykonanie tego zadania, co Ci zaraz wykażę.
Załóżmy, że na podniesienie Ziemi o 1 mm decydujemy się poświęcić 100 lat życia. Działając stałą siłą będziemy podnosić Ziemię ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $2 \cdot 10^{-22}$ m/s². Potrzebujemy do tego niewielkiej siły wypadkowej równej 123 kG. Niestety musimy zrównoważyć najpierw siłę przyciągania Jowisza $1{,}29 \cdot 10^{25}$ kG. Dźwignia musi więc działać siłą $1{,}29 \times$ $\times 10^{25}$ kG + 123 kG $\approx 1{,}29 \cdot 10^{25}$ kG.
W zaproponowanych przez Ciebie warunkach zadania dźwignia ma jedno ramię o długości $1{,}29 \cdot 10^{18}$ km.

Pomińmy brak możliwości wykonawczych. Aby koniec A przebył drogę 1 mm w ciągu 100 lat, koniec C musi w tym samym czasie przebyć tylko $1{,}29 \cdot 10^{15}$ km, a więc ze średnią prędkością około 400 tys km/s — z prędkością przewyższającą prędkość światła.
Jak widzisz, Archimedesowi nie wystarczy punkt podparcia na Jowiszu, aby nawet w ciągu 100 lat teoretycznie podnieść Ziemię.

M

Idea jednak była słuszna.

F

Tu mam wątpliwości — czy słuszna idea w odniesieniu do 1 kg ma być słuszna dla dowolnie dużej masy?

M

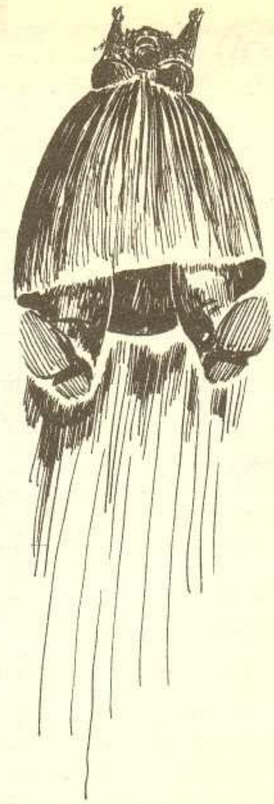
Czy Ziemi nie można więc ruszyć?

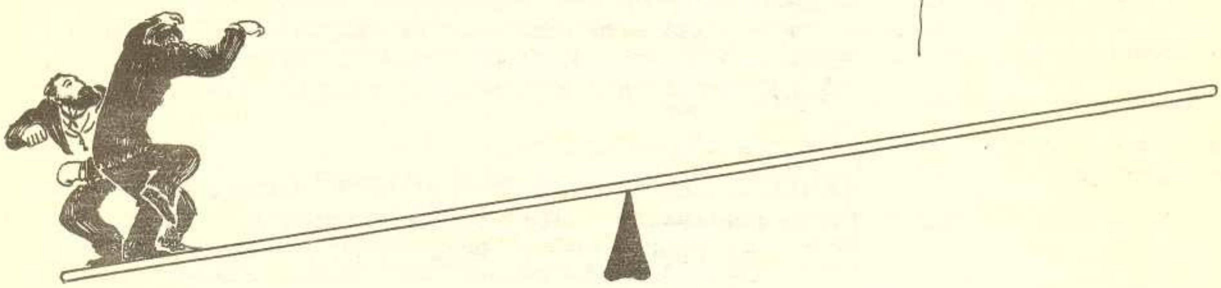
F

Można, ale do tego nie potrzeba dźwigni i punktu podparcia. Wystarczyłoby wystrzeliwać rakiety w przestrzeń kosmiczną w określonych położeniach Ziemi tak, aby przez 100 lat działać ze średnią siłą 123 kG na Ziemię jako całość w wybranym kierunku. Przesuniemy ją wtedy o 1mm i nadamy dodatkową prędkość $6{,}3 \cdot 10^{-13}$ m/s.

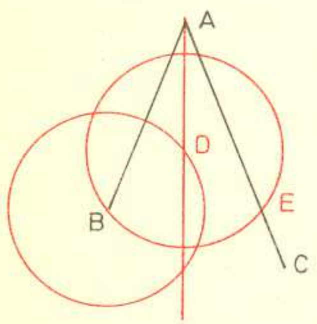
M

Pomysł Archimedesa jest jednak lepszy, bo niewykonalny. Ziemią lepiej się nie bawić.





Rozwiązanie zadania Tartaglii z pojedynku Tartaglia — Ferrari (1548 r.)



Zadanie: Dane są dwa odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, gdzie $AB > AC$. Z punktu A odłożyć na odcinku większym odcinek mniejszy posługując się tylko linijką i cyrklem o ustalonym (przez przeciwnika) rozwarciu.
A oto **rozwiązanie** tego zadania podane przez *FERRARIEGO*:
Z punktu B zatoczyć okrąg danym rozwarciem cyrkla i w punkcie D przecięcia tego okręgu z dwusieczną kąta BAC (dwusieczną taką można oczywiście skonstruować narzuconymi środkami technicznymi) przyjąć środek drugiego okręgu (o tym samym promieniu, bo jakżeby inaczej) — patrz rysunek obok. Jeden z punktów przecięcia tego drugiego okręgu z odcinkiem $\overline{AC}$ wyznacza wraz z punktem A żądany odcinek $\overline{AE}$, przystający do $\overline{AB}$ i zawarty w $\overline{AC}$.
Przystawania i jednoznaczności rozwiązania dowodzi Ferrari odbijając półprostą $AB^{\to}$ względem dwusiecznej kąta BAC i pokazując, że dla każdego innego punktu F półprostej $AC^{\to}$ jest $AF < AB$ lub $AF > AB$.
Jeżeli przeciwnik jest na tyle perfidny, że okrąg o środku w B nie przecina dwusiecznej kąta BAC, Ferrari poleca konstruować dwusieczne kątów przy wierzchołku A tak długo, aż któraś z nich przetnie ten okrąg. Wystarczy wtedy powtórzyć opisaną konstrukcję kilkakrotnie, odkładając $\overline{AB}$ na dwusiecznych coraz bliższych odcinkowi $\overline{AC}$, by uzyskać wreszcie żądany efekt.

Nasze najbliższe audycje: w listopadzie — 3 o godz. 10^{00} i 5 o godz. 13^{00}
w grudniu — 1 o godz. 10^{00} i 3 o godz. 13^{00}
w styczniu — 5 o godz. 10^{00} i 7 o godz. 13^{00}