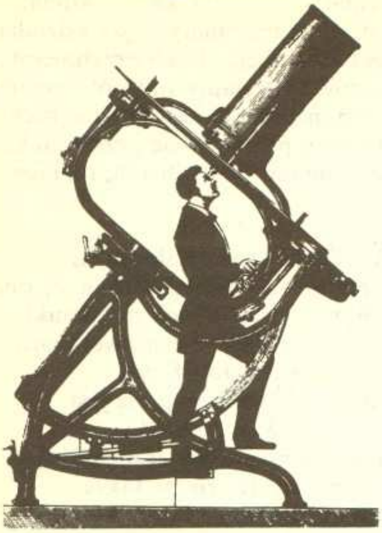


Czy mechanika — to matematyka, czy fizyka

Doc. dr Andrzej KRZYWICKI

Obiecałem Kolegom z Redakcji Delty odpowiedzieć na pytanie zawarte w artykule prof. Juliana Bondera, ale przyznam się szczerze, że im dłużej myślę, tym bardziej nie wiem jak to zrobić. Kłopot polega między innymi na tym, że sama potrzeba postawienia tego pytania może być, jak sądzę, jasna tylko dla kogoś, kto już zetknął się z mechaniką, i to nie całkiem pobieżnie. A główny adresat Delty, młodzież gimnazjalna i licealna, na ogół nie miała jeszcze okazji poznać z niej więcej, niż zawiera program szkolny, a więc prawa Newtona i pewne proste ich konsekwencje. Pytanie metodologiczne może być ciekawe tylko dla kogoś, kto już zna trochę dziedzinę szczegółową, której pytanie dotyczy. Z konieczności więc ograniczę się jedynie do ogólników powszechnie znanych i dużych uproszczeń.

Specjalne wyróżnienie mechaniki i pytanie o jej stosunek do matematyki i fizyki wywodzą się z XIX wieku, a powodem, dla którego tak często wracano do tego pytania, był fakt pozornie czysto matematycznej postaci mechaniki Newtona w odróżnieniu od reszty ówczesnej fizyki. Wydawało się mianowicie, że cała mechanika Newtona zawarta jest w kilku aksjomatach, z których na drodze czystej dedukcji logicznej wynikają wszystkie inne fakty mechaniki. Nie możemy się dziwić, że sprawa ta zafascynowała uczonych. Do dziś przecież zdumiewa nas to, że matematyka jest tak świetnym narzędziem opisu rzeczywistości. To przecież Einstein powiedział, że Bóg, który stworzył Wszechświat, był matematykiem.

Ale nie tylko wspomniana wyżej formalna struktura mechaniki zadecydowała o jej znaczeniu w myśli dziewiętnastowiecznej; pozostając częścią fizyki, stała się mechanika dla matematyki XIX wieku źródłem ogromnej inspiracji twórczej dzięki nowej postaci, a raczej postaciom, jakie nadali jej Lagrange, Hamilton i Jacobi. Bez przesady można powiedzieć, że cała analiza XIX wieku wywodzi się z rozwiniętej przez tych matematyków mechaniki „analitycznej", jak ją do nie tak dawna nazywano. W tej nowej postaci stała się ona tak nieodróżnialna od matematyki i tak bardzo daleka — jak się wydawało — od jej fizycznych źródeł, że jeden z największych autorytetów matematycznych, Felix Klein, mógł w ostatnich latach XIX wieku napisać o mechanice analitycznej: „fizyk z jej teorii może wynieść bardzo niewiele, a inżynier — nic".

Tymczasem pojawiła się teoria względności, przekreślając absolutny charakter mechaniki newtonowskiej i przez to samo umacniając osąd Kleina. Okazało się również, że sprawa pełnej aksjomatyzacji mechaniki Newtona, na wzór „Podstaw geometrii" Hilberta, jest niesłychanie skomplikowana. Nie doprowadzono jej do końca; zresztą dzisiejsze zainteresowania idą w innym kierunku, a jej znaczenie poznawcze byłoby zapewne niewspółmierne do wysiłków, które należałoby włożyć w jej stworzenie. Tak więc mechanika newtonowska, która wydawała się w XIX wieku podstawą i wzorem całej fizyki, straciła nagle to znaczenie.

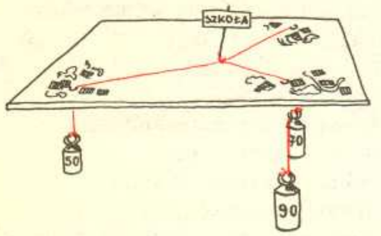
Ale minęło zaledwie jakieś trzydzieści lat od wypowiedzi Kleina, kiedy nieoczekiwanie stało się jasne, że to jakoby niewiele przydatne dla fizyków hamiltonowskie i lagrange'owskie ujęcie mechaniki wspaniale pasuje właśnie do mechaniki kwantowej. Pogląd, iż czysto matematyczna postać teorii, otrzymana przez formalną procedurę matematyczną, oznacza zerwanie z jej pierwotnym źródłem i jej nieprzydatność do opisu rzeczywistości, okazał się błędny. Mechanika klasyczna, przemieniona w mechanikę kwantową, znów zatriumfowała.

I znów historia się powtarza. Dziś mechanika staje się ponownie źródłem potężnej inspiracji dla matematyków. I znów matematycy nadają jej nową postać. I znów odzywają się głosy matematyków o nieprzydatności tych teorii dla samej mechaniki.

Najchętniej na tym zakończyłbym swoją wypowiedź. Tylko że zarzucono by mi, i słusznie, że nie odpowiedziałem wprost na postawione pytanie. Zastanawiam się, czy jest możliwa zupełnie jasna odpowiedź?

Wyobraźmy sobie coś w rodzaju mapy, a na niej wyodrębnione obszary fizyki, matematyki i mechaniki, niby trzy kraje. Wystarczy tylko powiedzieć, co jest fizyką, co matematyką a co mechaniką, nanieść te dane na naszą mapę, popatrzeć, czy obszar obejmujący to, co nazwaliśmy mechaniką ma niepusty przekrój z obszarem fizyki i matematyki — i już mamy gotową odpowiedź. Pozostaje tylko drobiazg: wyznaczyć te trzy „kraje" na naszej mapie. Musimy więc mieć jakieś kryterium rozpoznawcze. Może w takim razie zaczniemy od pytania: czym jest matematyka? Okazuje się, że nie ma co do tego ogólnej zgody nawet wśród matematyków. Z fizyką sprawa jest zapewne jaśniejsza, choć przeglądając niektóre z monografii poświęconych fizyce z trudem potrafimy je odróżnić od monografii matematycznych. Nic dziwnego, że wobec tych „nieostrości metodologicznych", nieostrości, które stale narastają w wyniku szybkiego rozwoju i wzajemnego przenikania różnych dyscyplin naukowych, jeszcze trudniej jest określić położenie mechaniki na mapie dzisiejszej nauki.

Rozwiązanie zadania M 141
Narysujmy na stole (no, może lepiej na kawałku sklejki) plan okolicy tych wiosek i w miejscu odpowiadającym tym wioskom zróbmy otwory. Przez otwory te przełóżmy sznurki obciążone masami odpowiednio 50 dag, 70 dag i 90 dag i złączmy je jednym węzłem. Punkt, w którym ustabilizuje się węzeł, wyznacza położenie szkoły.



Obliczmy bowiem łączną energię potencjalną. Wynosi ona $E = 50\ h_1 + 70\ h_2 + 90\ h_3$, gdzie h_1, h_2, h_3 są wysokościami (nad podłogą), na jakich zatrzymały się ciężarki. Niech l_1, l_2, l_3 będą długościami sznurków i r_1, r_2, r_3 — odległościami węzła od otworów. Wówczas $h_i = h + r_i - l_i$ $(i = 1, 2, 3)$, skąd $E = 50r_1 + 70r_2 + 90r_3 + (210h - 50l_1 - 70l_2 - 90l_3)$. Wielkość znajdująca się w nawiasie jest stała, a więc $50r_1 + 70r_2 + 90r_3$ przyjmuje wartość minimalną wtedy, gdy minimalne jest E, czyli w położeniu równowagi.
Zob. artykuł Z. Ogielskiego w Delcie 3/1977.

Cóż więc zrobić? Może przerzucić się w drugą skrajność i postąpić najprościej: do matematyki zaliczyć to, czym zajmują się matematycy, a do fizyki to, czym zajmują się fizycy? Okaże się wówczas, że mechanika jest i matematyką, i fizyką. Postępowanie takie na pewno wszystkim nam wyda się zbyt prostackie. Bez wątpienia tak jest. Może jednak w ten prosty sposób otrzymaliśmy odpowiedź taką samą, jak przy użyciu finezyjnych argumentów i przemyślnie dobranych przykładów?
Bo pytanie, na które mamy odpowiedzieć, to jedno z tych pytań, na które łatwo znaleźć banalną odpowiedź, jak ta powyżej, a bardzo trudno odpowiedź wnoszącą coś nowego do tej sprawy lub choćby stawiającą ją w nowym świetle, jak to czyni znakomite przeformułowanie przez prof. J. Bondera tytułowego pytania Jego artykułu przez dodanie słów „jeszcze" i „już tylko". I już dzięki temu jednemu zdaniu winniśmy dużą wdzięczność Redakcji Delty za podjęcie decyzji opublikowania niedokończonego artykułu prof. Juliana Bondera.

Rozwiązanie zadania F 47
Obliczymy dwiema metodami moment bezwładności jednorodnej powłoki kulistej względem osi przechodzącej przez środek: raz korzystając z własności symetrii, a raz korzystając z zasad analizy wymiarowej i addytywności momentu bezwładności. Porównanie wyników pozwoli jednoznacznie określić szukany moment bezwładności kuli.
Niech masa i promień powłoki kulistej będą równe odpowiednio M i R.
Pierwsza metoda
Podzielmy powłokę na bardzo małe kawałki o masach m_i (rys. 1). Weźmy pod uwagę jedną z osi przechodzących przez środek. Ze względu na symetrię możemy wziąć dowolną z nich, np. oś z. Możemy więc napisać

$$I_p = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2.$$

Ze względu na symetrię mamy

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 = \sum_i m_i z_i^2.$$

Sumę $\sum_i m_i z_i^2$ oznaczmy przez A. Mamy

$$3A = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i R^2 = R^2 \sum_i m_i = R^2 M.$$

Zatem $A = \frac{1}{3} MR^2$ i

(1) $$I_p = \frac{2}{3} MR^2.$$

Metodą tą nie da się wyprowadzić wzoru na moment bezwładności pełnej kuli. Wtedy bowiem $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \neq R^2$ i nie możemy się obejść bez całkowania.
Druga metoda
Moment bezwładności kuli jest zależny jedynie od R i M. Jedyna możliwa kombinacja tych wielkości mająca wymiar momentu bezwładności jest następująca:

(2) $$I_k = \alpha MR^2,$$

gdzie α jest nie znaną nam liczbą.
Weźmy teraz pod uwagę kulę z wydrążoną wewnątrz współśrodkową wnęką kulistą o promieniu r. Niech masa tej wydrążonej kuli wynosi M. Obliczmy jej moment bezwładności I_w względem osi przechodzącej przez środek.
Z addytywności momentu bezwładności wynika, że I_w jest różnicą między momentem bezwładności kuli, gdyby była ona pełna, a momentem bezwładności tej jej części, która została usunięta.
Niech $\beta = r/R$. Gęstość kuli wydrążonej wynosi

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3(1-\beta^3)}.$$

Korzystając z wzoru (2) możemy napisać:

$$I_w = \alpha \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \cdot R^2 - \alpha \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho \cdot r^2 = \alpha MR^2 \frac{1-\beta^5}{1-\beta^3} = \alpha MR^2 \frac{1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4}{1+\beta+\beta^2}.$$

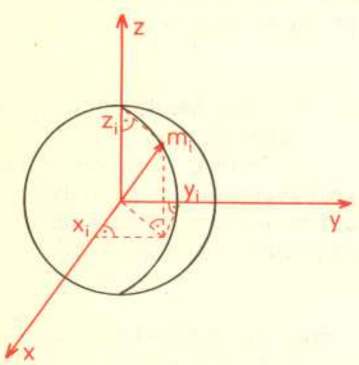
Dla r dążącego do R kula wydrążona staje się rozważaną poprzednio powłoką kulistą. Wtedy moment bezwładności I_w przechodzi w I_p.
Ale dla $\beta = 1$

(3) $$I_w = \frac{5}{3}\alpha MR^2 \quad (= I_p).$$

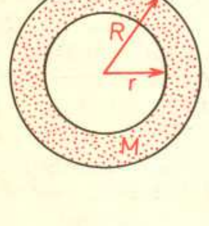
Porównując prawe strony wzorów (1) i (3) dostajemy $\alpha = \frac{2}{5}$.
Wobec tego wzór (2) na moment bezwładności pełnej kuli przybiera postać

$$I_k = \frac{2}{5} MR^2,$$

co kończy rozważania.
Zapewne przytoczone tu rozwiązanie nie jest jedyne. Czytelników, którzy znajdą rozwiązania istotnie różniące się od podanego, prosimy o nadesłanie ich do Redakcji.



Rys. 1



Rys. 2