mała delta

Spacery po siatce kwadratowej

Zwykła kartka kratkowanego papieru może służyć za planszę do wielu popularnych gier, na przykład do gry w kółko i krzyżyk, w szewca, w piłkę nożną czy w okręty. Na kratkach można także uczyć się matematyki. Zacznijmy od ustalenia kilku prostych reguł. Oto Regulamin, jaki nas będzie odtąd obowiązywał:

§ 1. *Kratki służą do spacerów.*

§ 2. *Po kratkach chodzi się krokami, od węzła do węzła (węzeł to punkt przecięcia się dwóch linii).*

§ 3. *W jednym kroku wolno przejść tylko do jednego z dwóch następujących węzłów: albo najbliższego w górę, albo najbliższego w prawo.*

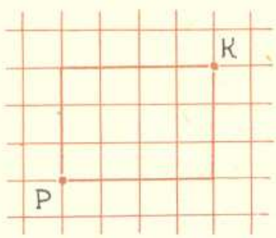
§ 4. *Należy ustalić, gdzie zaczynać i gdzie kończyć spacery.*

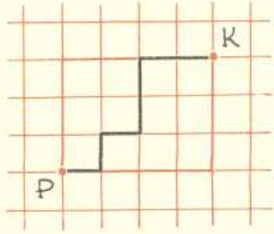
§ 5. *Należy ustalić, przez jakie węzły siatki wolno przechodzić po drodze.*

§ 6. *Należy ustalić sposób zapisywania odbytych spacerów.*

§ 7. *Należy odpowiedzieć na postawione pytania.*

Przykład 1





Zgodnie z § 4 Regulaminu zaznaczyliśmy na rysunku dwa węzły: węzeł *P* to początek spacerów, węzeł *K* to ich koniec.

Ustalamy, że wolno chodzić po wszystkich węzłach. Jednak oczywiście w grę wchodzą tylko węzły wewnątrz pogrubionej linii na rysunku (i na niej). Dlaczego?

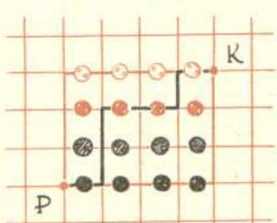
Spacery zapisywać będziemy w ten sposób. Notujemy po kolei każdy krok pisząc 1, gdy jest to krok w prawo, lub 0, gdy jest to krok w górę. Przykładowo, spacer przedstawiony na rysunku zapiszemy jako 1010011.

Teraz pora na pytanie: ile jest różnych takich dróg? Łatwo zauważyć, że różne (dozwolone w tym przykładzie) spacery będą zapisane w różny sposób. Sprawdźcie dla pewności, że na przykład tylko jeden spacer może być zapisany jako 0011101. Jaki to spacer?

Nietrudno także zauważyć, że dozwolonym w tym przykładzie spacerom odpowiadają napisy zero-jedynkowe ułożone z trzech zer i czterech jedynek.

A więc różnych dróg jest tyle samo, co różnych napisów zero-jedynkowych ułożonych z trzech zer i czterech jedynek.

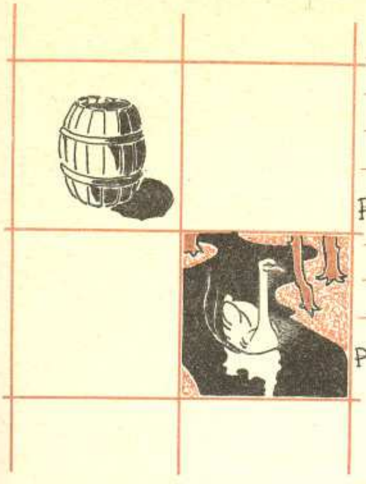
Przykład 2

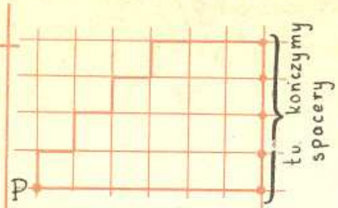


Początek spacerów i ich koniec takie, jak w poprzednim przykładzie. Wolno chodzić po wszystkich węzłach. Objaśnimy sposób zapisywania spacerów. Zaczynamy od ułożenia na siatce kolorowych guzików, tak jak pokazuje rysunek. Spacerując zbieramy napotkane po drodze guziki. Dla przykładu, idąc drogą zaznaczoną na rysunku podniesiemy jeden guzik czarny, dwa brązowe i jeden biały. Zapiszemy to po prostu: 1 czarny, 2 brązowe, 1 biały.

A oto pytania:

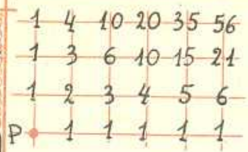
1. Ile guzików możemy znaleźć na spacerze?
2. Czy mogą być wszystkie jednakowe?
3. Czy może być każdy inny?
4. Czy mając zebrane przez kogoś guziki (i złośliwie pomieszane) możemy odnaleźć jego drogę?





Przykład 3 W przykładzie 1 zmieniamy brzmienie §§ 4 i 5 Regulaminu. Kończyć spacery można nie w jednym, lecz w kilku różnych węzłach. Dozwolony obszar spacerów jest taki, jak na rysunku. Zmienimy też § 7: postawcie kilka sprytnych pytań dotyczących takich spacerów (np. dla kolegi).

Pora jednak odpowiedzieć na pytanie zasadnicze: jak obliczać, ile jest różnych dróg po siatce?
Odpowiedź daje następująca reguła dodawania dróg.
„Drogi zaczynające się w ustalonym węźle siatki przeliczać można stopniowo: najpierw drogi do węzłów najbliższych początku, później do coraz dalszych. Liczba dróg do danego węzła zawsze jest sumą: liczba dróg do węzła o krok w lewo plus liczba dróg do węzła o krok w dół".



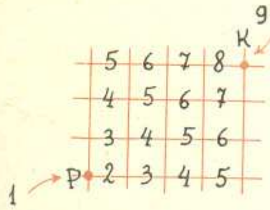
A oto zastosowanie tej reguły do obliczeń:
Teraz fraszką będzie dla Czytelnika rozwiązanie następującego zadania.

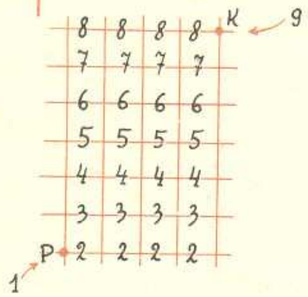
Zadanie

Oto przykład rosnącego ciągu liczb naturalnych:

1, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 16

(każda kolejna liczba ciągu jest większa od poprzedniej).
Z kolei, o ciągu 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4
powiemy, że jest niemalejący (żadna kolejna liczba nie jest mniejsza od poprzedniej).
Ile jest rosnących ciągów liczb naturalnych zaczynających się od 1, kończących na 9 i złożonych z 5 liczb? A ile jest takich ciągów niemalejących? (Wskazówki na rysunkach.)





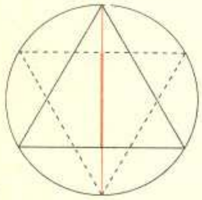
czanny

CO MOŻE MATEMATYKA

W kole poprowadzono przypadkową cięciwę. Na ile prawdopodobne jest, że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w to koło?

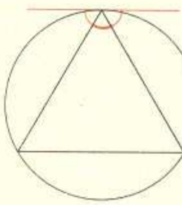
Rozwiązanie

Problem charakteryzuje się symetrią obrotową (rozwiązanie nie może się zmienić, jeśli dokonamy obrotu koła wokół jego środka), zatem



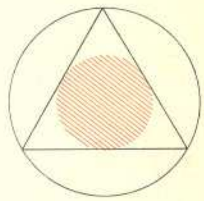
kierunek cięciwy nie jest istotny. Możemy więc przyjąć, że cięciwa jest prostopadła do pionowej średnicy i jest wobec tego jednoznacznie wyznaczona przez punkt przecięcia z tą średnicą. Cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta, jeśli ten punkt będzie oddalony od środka koła o mniej niż 1/2 promienia. Punkty takie wypełniają odcinek o długości równej połowie średnicy. Ponieważ zaś punkty odpowiadające wszystkim cięciwom wypełniają całą średnicę, to szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{1}{2}.$$



nie jest istotne położenie jednego z końców cięciwy. Możemy więc przyjąć, że cięciwa wychodzi z ustalonego punktu okręgu i jest wobec tego jednoznacznie wyznaczona przez kąt, jaki tworzy ze styczną do okręgu w tym punkcie. Cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta, jeśli kąt ten będzie leżał w przedziale $\langle\pi/3, 2\pi/3\rangle$, którego długość wynosi $\pi/3$. Kąty odpowiadające wszystkim możliwym cięciwom wypełniają zaś przedział o długości π — zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{1}{3}.$$



cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy jej środek będzie leżał wewnątrz koła wpisanego w dowolny taki trójkąt. Obszar zajmowany przez środki cięciw dłuższych od boku trójkąta jest więc kołem otwartym o promieniu o połowę mniejszym od promienia danego koła, zatem ma pole równe 1/4 pola koła. Ponieważ zaś środki wszystkich możliwych cięciw wypełniają całe koło, to szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{1}{4}.$$

TYLE MOŻE MATEMATYKA,

gdy stosuje się ją do niesprecyzowanego zagadnienia: co to jest bowiem „przypadkowa cięciwa"?




ZROBIMY ODKRYCIE

Przewodnik, w którym płynie prąd elektryczny, zachowuje się jak magnes. Nie będziemy niestety pierwsi. O 157 lat wyprzedził nas Hans Christian Oersted (czytaj: Ersted), fizyk duński. Nie powinno nas to zrażać, tym bardziej że robienie odkryć jest zawsze świetną zabawą. Na wstępie musimy się odpowiednio zaopatrzyć w przenikliwe spojrzenie na otaczający nas świat, podniosły nastrój oraz parę drobiazgów. Oto one.

1. Głęboki talerz napełniony wodą. Ze względu na konsekwencje nie związane bezpośrednio z eksperymentem radzimy między talerzem a stołem, na którym go postawimy, umieścić ceratę.
2. Zwykła igła do szycia — raczej z tych mniejszych.
3. Kawałek cienkiego drutu — w terminologii naukowej ma to być przewodnik jednożyłowy o długości około 30 cm. Możemy go uzyskać, rozdzielając stary przewodnik dwużyłowy.
4. Co najmniej jedna płaska bateryjka 4,5 V. Dwie baterie rozszerzają możliwości badawcze.
5. Zwykły ołówek. Może być obgryziony.

Można uzupełnić zestaw aparatury zwykłym magnesem sztabkowym oraz, ale to tylko osoby wyjątkowo sumienne, zaopatrzyć się w zeszyt do notatek czyli w dziennik laboratoryjny. W dzienniku zanotujemy, co nas w doświadczeniu zdziwiło.

A oto schemat postępowania i rady nad czym warto się zastanowić.

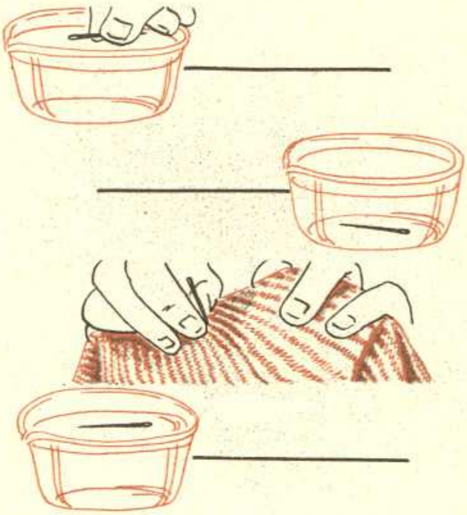
Na powierzchnię wody kładziemy ostrożnie igłę.

Tonie.

Wycieramy igłę i ręce.

Utrzymuje się.

Obserwujemy powierzchnię wody wokół igły.



Dlaczego ostrożnie, czy nie można rzucić?

Kiedy tonie?

Dlaczego igła i ręce muszą być suche?

Dlaczego nie tonie? Przecież jest cięższa od wody.

Czy na powierzchni wody jest jakaś błonka?

Igła leży (a nie pływa, bo jest cięższa od wody) na wodzie i najlżejsze tchnienie może ją poruszyć. O to właśnie chodziło — chcemy mieć coś (obiekt), co reaguje nawet na bardzo małe siły. Jeżeli masz magnes, zbliż go z daleka do igły, a zobaczysz jak żywo zareaguje. Chcemy zrobić odkrycie stwierdzając, że igła zareaguje również na przepływ prądu elektrycznego.

Przystępujemy do drugiej części doświadczenia.



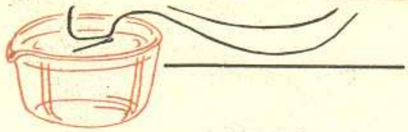

Równolegle do igły zbliżamy przewodnik nie połączony z baterią.

Czy igła reaguje na obecność przewodnika?

Przewodnik łączymy z bateryjką (tylko na krótko).

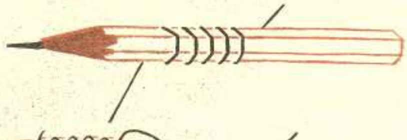
Dlaczego nie na stałe? Przecież to wygodniej.

Obserwujemy ruch igły.



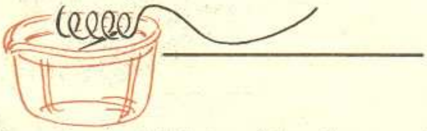
Pod jakim kątem ustawiła się igła do przewodnika?

Nawijamy drut na ołówek — tworzymy małą cewkę o kilku zwojach.



Czy można tak nawinąć, aby mimo przepływu prądu igła nie reagowała?

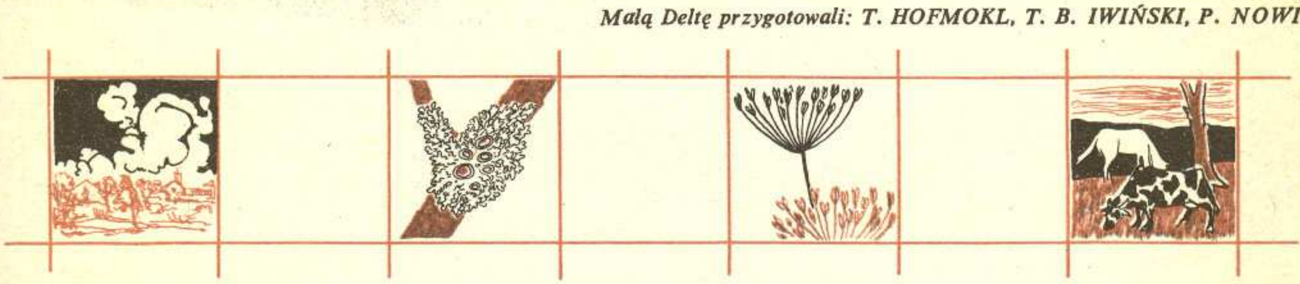
Zbliżamy cewkę, przez którą płynie prąd, do igły.



Czy igła reaguje teraz silniej niż poprzednio?

Doświadczenie możemy kontynuować, używając dwóch bateryjek połączonych o tak zamiast jednej. Siłę oddziaływania na igłę można ocenić z szybkości ruchu igły. Możliwości doświadczeń są bardzo duże i równie dużo jest do zrozumienia i do przemyślenia. Nie dajemy odpowiedzi na postawione pytania? Znaleźć je można w szkolnym podręczniku fizyki do klasy 8-ej. Doświadczenie, w którym igła wychyla się pod wpływem prądu przepływającego w pobliskim przewodniku, było pierwszym, w którym wykazano własności magnetyczne prądu stałego. Ruch igły jest najprostszym przykładem pracy mechanicznej wykonanej przez prąd. Stąd już tylko krok do budowy silników elektrycznych. Dokonaliśmy rzeczywiście wielkiego odkrycia — czy szkoda, że spóźnieni?

Małą Deltę przygotowali: T. HOFMOKL, T. B. IWIŃSKI, P. NOWICKI



Rozwiązanie zadania z wrześniowej Radio-Delty.

Radio

Zadanie: Po wewnętrznej stronie okręgu O_1 toczy się okrąg O_2. Średnica okręgu O_2 jest dwukrotnie mniejsza niż średnica okręgu O_1. Wykazać, że każdy punkt okręgu O_2 porusza się po pewnej średnicy okręgu 0_1

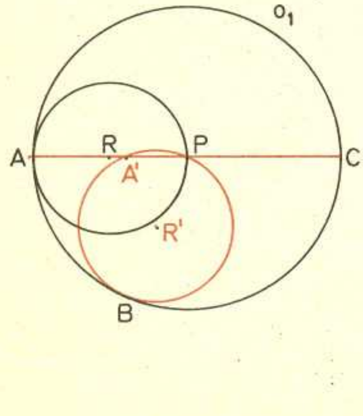
Rozwiązanie:

Niech P będzie środkiem okręgu O_1, a R środkiem okręgu O_2. R' niech będzie środkiem O_2' — obrazu okręgu O_2 po przetoczeniu się po łuku $\widehat{AB}$. Punkt A' jest różnym od P punktem przecięcia średnicy $\overline{AC}$ okręgu O_1 z okręgiem O_2'. Dowód sprowadza się do wykazania, że długości łuków $\widehat{AB}$ i $\widehat{A'B}$ są równe.

Policzmy:

$$\widehat{AB} = AP \cdot \sphericalangle APB$$

$$\widehat{A'B} = BR' \cdot \sphericalangle A'R'B = 1/2\ AP \cdot 2 \cdot \sphericalangle A'PB = AP \cdot \sphericalangle APB.$$



A oto terminy następnych audycji:

W październiku — 6 o godzinie 10^{00} i 8 o godzinie 13^{00}

W listopadzie — 3 o godzinie 10^{00} i 5 o godzinie 13^{00}

W grudniu — 1 o godzinie 10^{00} i 3 o godzinie 13^{00}

Audycje są nadawane w programie IV PR.

Nasz adres: Polskie Radio
skrytka pocztowa 46
00-950 Warszawa
Radio-Delta