Geometria algebraiczna — czyli jak sobie poradzić z nieciągłością w geometrii (część III)

Dr Michał SZUREK

Ta własność pary funkcji f i g nazywana bywa w innych teoriach stycznością n-tego rzędu

W poprzednich numerach Delty opisaliśmy, jak sensownie naśladować niektóre geometryczne i analityczne pojęcia w geometrii algebraicznej, to jest dziale matematyki, zajmującym się badaniem zbiorów określonych równaniami wielomianowymi. Istotne trudności biorą się stąd, że ciało K, z którego pochodzą współczynniki wielomianów, nie musi być ciałem liczbowym, a wtedy badane zbiory nie mają „naturalnej" struktury geometrycznej. Jej namiastkę otrzymaliśmy, definiując zbiory domknięte w przestrzeni K^n jako zbiory algebraiczne, a zbiory otwarte — jako dopełnienia domkniętych. Wzbogaciliśmy tę strukturę przez wprowadzenie snopów funkcji. Interesują nas teraz nie same przestrzenie topologiczne Zariskiego, ale te przestrzenie wraz ze snopami funkcji wymiernych określonych na podzbiorach otwartych. „Krzywe" $x^2+y^2 = 1$ i $x^3+y^3 = 1$ są takie same jako przestrzenie topologiczne, lecz mają różne snopy funkcji. W geometrii duże znaczenie ma lokalne badanie krzywej czy powierzchni, to znaczy badanie jej własności wokół ustalonego punktu (a to z kolei znaczy: ... w dowolnie małym otoczeniu tego punktu). W naszym abstrakcyjnym przypadku jest to znacznie utrudnione, gdyż te „dowolnie małe" otoczenia są i tak bardzo duże: w topologii Zariskiego na krzywej (opisanej przez wielomian nierozkładalny) otoczenie dowolnego punktu zawiera prawie wszystkie punkty tej krzywej. Wykorzystując fakt, że ograniczamy się do badania tylko funkcji wielomianowych (a co najwyżej ilorazów takich funkcji), możemy w sensowny i pożyteczny sposób wprowadzić pojęcie „nieskończenie małego" otoczenia punktu i stosunkowo łatwo badać własności interesujących nas obiektów na tych „malutkich" otoczeniach. Rozważmy najpierw punkt x_0 na prostej liczbowej R. Rozpatrujmy tylko te funkcje, które są nieskończenie wiele razy różniczkowalne (w zwykłym sensie, znanym ze szkoły) w pewnym otoczeniu punktu x_0. Takimi funkcjami są wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze i logarytmiczne, a także funkcje wymierne, określone w x_0. Wszystkie wymienione funkcje są przykładami tzw. funkcji analitycznych. Rozpatrzmy dwie nieskończenie wiele razy różniczkowalne funkcje f i g. Pojęcie nieskończenie małego otoczenia n-tego rzędu punktu x_0 jest tak dobrane, że jest prawdziwe następujące twierdzenie: funkcje f i g są równe na nieskończenie małym otoczeniu n-tego rzędu punktu x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(x_0) = g^{(n-1)}(x_0)$. Można by to przyjąć za pewnego rodzaju definicję takiego otoczenia. Im większy jest rząd nieskończenie małego otoczenia, na którym dwie funkcje f i g są równe, tym „gładsze" jest przejście w punkcie $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ z krzywej $y = f(x)$ na $y = g(x)$.

Przykład. Niech $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in R$, zaś

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{gdy } x > 0, \\ 0 & \text{gdy } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Funkcje f i g są równe na każdym nieskończenie małym otoczeniu liczby 0 (wszystkie pochodne funkcji g w 0 są równe 0), jednak nie są równe na żadnym „prawdziwym" otoczeniu 0.

W przedstawionym opisie pojęcia nieskończenie małego otoczenia punktu używaliśmy tylko pojęcia „otoczenia" oraz zwrotu „różniczkować". Przedtem zaś wyjaśniliśmy, co rozumiemy przez „otoczenie" (ogólniej: zbiór otwarty) w abstrakcyjnych przestrzeniach Zariskiego oraz wytłumaczyliśmy, co rozumiemy przez „pochodną". Jesteśmy tym samym w stanie sformułować „uwikłaną" definicję nieskończenie małego otoczenia n-tego rzędu na każdym zbiorze algebraicznym. Okazuje się następnie, że przez swego rodzaju „przejście graniczne" (przy $n \to \infty$) po tych nieskończenie małych otoczeniach otrzymujemy coś pośredniego między „dużym" otoczeniem w przestrzeni Zariskiego a „malutkim" otoczeniem nieskończenie małym. Daje to nową metodę lokalnego badania zbiorów algebraicznych. Jest ona możliwa tylko dzięki temu, że w klasie rozpatrywanych przez nas funkcji możemy twierdzić, że jeżeli dwie funkcje są takie same na każdym nieskończenie małym otoczeniu pewnego punktu, to są takie same na pewnym „prawdziwym" otoczeniu. Opisany wyżej przykład pokazuje, że w ogólnym przypadku istnieją funkcje, które tej własności nie mają.

Jednym z częściej wykorzystywanych twierdzeń geometrii różniczkowej (opartej na zwykłej geometrii prostej liczbowej) jest twierdzenie o funkcjach uwikłanych. W bardzo szczególnym przypadku mówi ono, że jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła i różniczkowalna (w zwykłym sensie) w pewnym otoczeniu punktu x_0 i pochodna $y' = \dfrac{df}{dx}$ jest różna od zera w punkcie x_0, to istnieje otoczenie U tego punktu, na którym f jest funkcją odwracalną, to znaczy zmienna x da się wyrazić jako funkcja zmiennej y na pewnym otoczeniu V punktu $y_0 = f(x_0)$.

W przestrzeniach Zariskiego (w ich ubogiej topologii) twierdzenie to nie jest prawdziwe, o czym można się łatwo przekonać już na przykładzie funkcji $y = x^2$. Wynikającą stąd trudność związaną z niemożnością lokalnego „rozwikłania" funkcji udało się pokonać przez wprowadzenie tak zwanej *topologii étale*. Nie jest to topologia w poprzednio (i powszechnie) używanym sensie tego słowa — *otoczenie étale* punktu x zbioru algebraicznego X jest dość skomplikowanym obiektem algebraiczno-geometrycznym i posługiwanie się *topologią étale* wymaga już pewnej specjalizacji w geometrii algebraicznej. Przy określeniu tej „topologii" jeszcze raz dochodzi do głosu praktyczny formalizm, cechujący dziś wiele działów matematyki. W matematyce jest dość łatwo wprowadzać nowe pojęcia, zwłaszcza właśnie drogą formalnego przeniesienia pojęć już istniejących na nieco inny zakres obiektów. Jednak często jest to tylko niczemu nie służąca zabawa. Jedną z cech, jakie musi mieć dobry matematyk, jest umiejętność odróżnienia, które pojęcia są warte uwagi, a które nie, które teorie będą służyć faktycznemu rozwojowi nauki, a które są marginesową ciekawostką. Że nie jest to łatwe, świadczy dobitnie historia geometrii nieeuklidesowych — nie docenianych w XIX wieku, a dziś stanowiących podbudowę teorii (np. teorii względności) opisujących rzeczywistość fizyczną. Gdyby porównać zdobywanie nowych obszarów matematyki do wspinaczki górskiej, nasunie się następująca analogia. Dobry wspinacz musi mieć opanowaną technikę pokonywania ścianek, płyt, rys, kominów i przewieszek — ale musi mieć również wyczucie: ta rysa doprowadzi mnie na szczyt, a tędy dojdę pod niemożliwy do przejścia okap. Od matematyka wymagamy nie tylko pomysłowego i sprawnego rozwiązywania zadanych zadań, ale (co z biegiem lat staje się ważniejsze) wyczucia oraz opartej na intuicji i doświadczeniu orientacji w nieznanym terenie.

Opisana przez nas metoda wprowadzenia pojęć analizy matematycznej i geometrii różniczkowej tam, gdzie jest to z pozoru niemożliwe, jest owocem wysiłku kilku pokoleń matematyków. Droga, którą oni szli, jest kręta i wydaje się, że można ją uprościć, aby następni mogli pójść jeszcze dalej.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 136. Udowodnić, że jeżeli obwody ścian czworościanu są równe, to ściany są trójkątami przystającymi.

Rozwiązanie na str. 16

M 137. Wyznaczyć wszystkie pary niepustych podzbiorów A i B zbioru liczb całkowitych Z mające następujące własności:

1) $Z = A \cup B$ i co najmniej jeden ze zbiorów $Z-A$ i $Z-B$ jest niepusty,

2) suma dwóch liczb należących do tego samego podzbioru należy do A, suma dwóch liczb należących do różnych podzbiorów należy do B.

Rozwiązanie na str. 16

M 138. Na okręgu wybrano pięć różnych punktów P, P_1, P_2, P_3, P_4, dla których zachodzą równości

$$\sphericalangle P_1PP_2 = \sphericalangle P_2PP_3 = \sphericalangle P_3PP_4 = \frac{\pi}{4}.$$

Udowodnić, że punkty P_1, P_2, P_3, P_4 są wierzchołkami kwadratu.

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 46. W poprzednim zadaniu istotną rolę odgrywała analiza wymiarowa. Metodami analizy wymiarowej można udowodnić wiele zależności, jednak czasami — przy nieumiejętnym jej stosowaniu — można popaść w tarapaty. Oto przykład rozumowania prowadzącego na manowce. Weźmy pod uwagę nieskończoną, cienką, prostoliniową nić naładowaną w ten sposób, że liniowa gęstość ładunku (czyli ładunek przypadający na jednostkę długości) η jest stała. Interesuje nas pole elektryczne $\boldsymbol{E}$ w przestrzeni wokół nici, a konkretnie w punkcie oddalonym od nici o r. Dla ustalenia uwagi rozważania będziemy przeprowadzać w układzie CGS. Najpierw wyznaczmy potencjał. Jedynymi parametrami charakteryzującymi nasz układ są: gęstość ładunku η o wymiarze pierwiastka kwadratowego z dyny oraz odległość r o wymiarze cm. Można by więc sądzić, że wielkości te powinny wystarczyć do wyznaczenia potencjału $V(r)$. Innymi słowy, można by sądzić, że $V(r)$ powinno być sumą wyrażeń postaci: stała $\cdot\, \eta^i \cdot r^j$. Wymiarem potencjału jest pierwiastek kwadratowy z dyny. Jedynym wyrażeniem podanej postaci mającym właściwy wymiar, jak łatwo sprawdzić, jest po prostu stała $\cdot\, \eta^1 \cdot r^0$ czyli stała $\cdot\, \eta$. Zatem $V(r) =$ stała $\cdot\, \eta$. Widzimy więc, że potencjał $V(r)$ w ogóle nie zależy od r. Wynika stąd, że pole elektryczne wokół nici jest równe zeru, co jest oczywistą nieprawdą, gdyż dobrze wiadomo, że pole elektryczne pochodzące od jednorodnie naładowanej nici jest odwrotnie proporcjonalne do r.

Sprawdźcie, czy podane wyżej rozumowanie również w układzie SI prowadzi do paradoksu i spróbujcie wyjaśnić, gdzie został popełniony błąd.

Rozwiązanie na str. 11