



Dla fal spełniających proste równanie falowe (np. fale elektromagnetyczne w próżni) związek dyspersyjny jest bardzo prosty

$$\omega = c \cdot k.$$

Fale takie nie wykazują zjawiska dyspersji,

a prędkość fazowa  $v_f = \frac{\omega}{k}$  jest równa

prędkości grupowej  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Podobny

jest związek dyspersyjny dla fal dźwiękowych.

Jednakże te same fale elektromagnetyczne w ośrodku materialnym mają już związek dyspersyjny bardziej złożony i  $v_f \neq v_g$ .

Zjawiska nazywamy rezonansowymi, gdy zachodzą dla pewnych, ściśle określonych związków między częstościami drgań fal. Na przykład, w układach liniowych na pewno następuje rezonans przy częstościach pobudzenia równych częstości własnej układu. W układach nieliniowych relacje rezonansowe są bardziej złożone, a formuła (2) przedstawia najprostszą z nich.

W poprzednim artykule (Delta 4/1976) omawialiśmy podstawowe różnice pomiędzy własnościami rozwiązań równań liniowych i nieliniowych, a zwłaszcza analizowaliśmy szczegółowo dziwne własności rozwiązań równania Kortewega — de Vriesa. Teraz, kontynuując naszą dyskusję, zapoznamy się z pewnymi niecodziennymi własnościami układu oddziałujących fal. Rozważmy fale pewnego rodzaju (np. fale dźwiękowe, elektromagnetyczne, plazmowe, spinowe itd.) rozchodzące się w jakimś ośrodku. Jeśli fale te mają małą amplitudę, to mogą rozchodzić się niezależnie. Każda z fal opisywana jest wtedy pewnym równaniem liniowym (np. równaniem falowym). Jeśli możemy zaniedbać procesy przekazywania energii od fali do ośrodka, to fala o określonej częstości może być zapisana w postaci

$$(1) \quad a_k^\alpha \cos(\omega^\alpha(k)t - xk),$$

gdzie  $\alpha$  — oznacza typ fali,  $a_k^\alpha$  jest stałą w czasie amplitudą fali, zaś częstość  $\omega^\alpha(k)$  zależy od

wektora falowego (długość fali  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ). Uwzględnienie przekazywania energii od fali do ośrodka

(np. zamiana drgań na ciepło) prowadzi do pojawienia się efektu tłumienia. Istnieją jednak układy fizyczne, w których energia przechodzi od ośrodka do pewnego typu fal. Fale takie narastają w czasie i są nazywane falami niestabilnymi. Wprowadziliśmy tutaj bardzo ważne pojęcie stabilności. Dla fizyka (matematycy oczywiście wprowadzili to pojęcie inaczej, bardziej precyzyjnie) jakieś rozwiązanie (stan) będzie stabilne, jeśli małe zaburzenie stanu początkowego nie doprowadzi w czasie ewolucji do narastania różnicy między rozwiązaniem zaburzonym a niezaburzonym.

Wracając do naszych fal, oddziaływanie liniowe fal o małej amplitudzie z ośrodkiem można opisać równaniem

$$(2) \quad \frac{d}{dt} a_k^\alpha = -\gamma a_k^\alpha,$$

gdzie amplituda  $a_k^\alpha$  oczywiście zależy teraz od czasu. Jeśli  $\gamma > 0$ , to mamy tłumienie, a gdy  $\gamma < 0$  — niestabilność.

Związek pomiędzy częstością a wektorem falowym

$$(3) \quad \omega = \omega^\alpha(k)$$

nazywamy związkiem dyspersyjnym. W danym ośrodku może jednocześnie rozchodzić się wiele fal o różnych związkach dyspersyjnych.

Zupełnie inaczej wygląda sytuacja, gdy co najmniej jedna z fal ma dużą amplitudę. Fala taka modyfikuje ośrodek, w którym się rozchodzi. Na przykład fala dźwiękowa o dużej amplitudzie powoduje powstanie lokalnych (poruszających się z falą) zgęszczeń i rozrzedzeń, a więc do ośrodka jednorodnego wprowadza niejednorodności. W tak zmodyfikowanym ośrodku druga fala może poruszać się inaczej niż w ośrodku, w którym pierwsza fala nie istnieje. Zjawisko to nazywamy oddziaływaniem fal. Modyfikacja ośrodka jest w przybliżeniu proporcjonalna do amplitudy odpowiedniej fali. A więc w pierwszym przybliżeniu przyczynek do członu opisującego szybkości zmian amplitudy, pochodzący od oddziaływania fal, jest formą kwadratową amplitud oddziałujących fal.

Zajmiemy się tutaj bardzo specjalnym, tak zwanym rezonansowym, oddziaływaniem fal. Wyobraźmy sobie ośrodek, w którym rozchodzące się fale mają następującą własność: dla pewnych wektorów falowych  $k, k_1$  spełniony jest warunek:

$$(4) \quad \omega^\alpha(k) = \omega^\beta(k_1) + \omega^\gamma(k - k_1),$$

gdzie indeksy  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają fale o różnych związkach dyspersyjnych (bądź fale mogą być identyczne). Takie częstości i odpowiadające im wektory falowe będziemy nazywać rezonansowymi. Istnienie rezonansu trzech fal pociąga za sobą głębokie konsekwencje. Jak zobaczymy, sprzężenie nieliniowe może całkowicie zmienić zachowanie amplitud fal w czasie. Dla uproszczenia naszych rozważań wyobraźmy sobie, że w naszym układzie istnieją jedynie trzy fale oznaczone odpowiednio indeksami  $(\alpha, k)$ ,  $(\beta, k_1)$  oraz  $(\gamma, k_2)$ , gdzie  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  oznaczają typ fali, zaś  $k, k_1$  oraz  $k_2$  odpowiednie wektory falowe. Ponieważ założyliśmy, że w układzie istnieją tylko trzy fale, możemy opuścić bez możliwości pomyłki indeksy wektorów falowych. Będziemy wtedy mogli napisać następujące równania różniczkowe opisujące amplitudy tych fal:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} a_\alpha &= -\gamma_\alpha a_\alpha + A_\alpha^{\beta\delta} a_\beta a_\delta \\ \frac{d}{dt} a_\beta &= -\gamma_\beta a_\beta + A_\beta^{\alpha\delta} a_\alpha a_\delta \\ \frac{d}{dt} a_\delta &= -\gamma_\delta a_\delta + A_\delta^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta. \end{aligned}$$

Przyjmijmy na początek dalsze uproszczenie, a mianowicie połączmy wszystkie  $\gamma_\alpha = 0$ , co oznacza, że fale nie są tłumione liniowo. Zauważmy teraz, że przez proste podstawienie

$$(6) \quad a_\alpha = \frac{x}{\sqrt{|A_\beta^{\alpha\delta}| |A_\delta^{\alpha\beta}|}}, \quad a_\beta = \frac{y}{\sqrt{|A_\alpha^{\beta\delta}| |A_\delta^{\beta\alpha}|}}, \quad a_\delta = \frac{z}{\sqrt{|A_\alpha^{\delta\beta}| |A_\beta^{\delta\alpha}|}}$$

równania (5) przekształcimy do dużo prostszej postaci. W podstawieniu (6) symbolem  $|A|$  oznaczyliśmy wartość bezwzględną liczby  $A$ . Układ równań można teraz zapisać w postaci:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma_1 yz \\ \dot{y} &= \sigma_2 xz \\ \dot{z} &= \sigma_3 xy, \end{aligned}$$

gdzie kropka nad odpowiednią amplitudą oznacza pochodną względem czasu, a współczynniki  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mogą przyjmować jedynie wartości  $\pm 1$ . Zauważmy tutaj, że (dla dodatnich amplitud  $x, y, z$ )  $\sigma = +1$  oznacza narastanie, zaś  $\sigma = -1$  tłumienie. Istnieją jedynie dwa istotnie różne przypadki, gdy wszystkie  $\sigma_i$  są tego samego znaku oraz gdy jedna z nich jest innego znaku. Zachowanie się rozwiązań jest w obu tych przypadkach diametralnie różne.

Zobaczmy teraz, że pewne funkcje naszych amplitud są stałe w czasie. Aby to zauważyć, pomnożmy stronami równania (7) odpowiednio przez  $x, y$  i  $z$ . Otrzymamy wówczas następujący układ równań:

$$(8) \quad \begin{aligned} x\dot{x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2 = \sigma_1 xyz \\ y\dot{y} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} y^2 = \sigma_2 xyz \\ z\dot{z} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} z^2 = \sigma_3 xyz. \end{aligned}$$

Zauważmy, że lewe strony równań są proporcjonalne. Kombinując odpowiednio równanie pierwsze z drugim oraz pierwsze z trzecim, otrzymujemy dwa związki:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_2 \frac{d}{dt} x^2 - \sigma_1 \frac{d}{dt} y^2 &= 0 \\ \sigma_3 \frac{d}{dt} x^2 - \sigma_1 \frac{d}{dt} z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Związki te można scałkować i wtedy otrzymamy dwie zasady zachowania (funkcje zmiennych dynamicznych — w naszym przypadku amplitud — są stałe w trakcie ewolucji). Nasze zasady zachowania zapiszemy następująco:

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma_2 x^2 - \sigma_1 y^2 &= C_1, \\ \sigma_3 x^2 - \sigma_1 z^2 &= C_2, \end{aligned} \quad \text{gdzie } C_1 \text{ i } C_2 \text{ są stałymi całkowania.}$$

Znalezienie i zbadanie stałych ruchu jest pierwszą czynnością fizyka przy badaniu danych równań. Badania takie dostarczają dużo informacji o własnościach rozwiązań. W naszym przypadku widać, że jeśli  $\sigma_1$  jest innego znaku niż  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , to związki (10) możemy przepisać

$$(11) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= C_1' \\ x^2 + z^2 &= C_2' \end{aligned}$$

Łatwo teraz wywnioskować, że jeżeli amplitudy  $x, y, z$  w chwili  $t = 0$  były ograniczone, to będą ograniczone dla każdej chwili czasu  $t > 0$  i wtedy modyfikacja ewolucji liniowej nie jest dramatyczna.

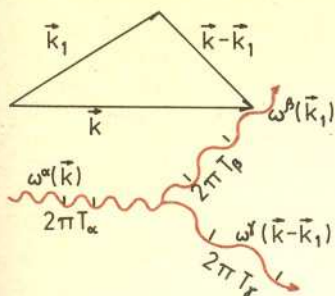
Natomiast w sytuacji, gdy wszystkie  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) są tego samego znaku, obraz będzie całkowicie różny. Nasze zasady zachowania można przepisać w postaci:

$$(12) \quad \begin{aligned} |x|^2 - |y|^2 &= C_1'' \\ |x|^2 - |z|^2 &= C_2''. \end{aligned}$$

Teraz nie tylko nasze stałe ruchu nie muszą być dodatnie, ale nie możemy już dłużej wnioskować o ograniczoności amplitud. Można sobie bowiem doskonale wyobrazić, że amplitudy rosną nieograniczenie, a ich kombinacje (12) są ograniczone. Jak za chwilę się przekonamy, nasze równania (7) opisują właśnie taki wzrost. Można skorzystać z zasad zachowania do wyeliminowania zmiennych  $y$  i  $z$ . Otrzymamy wtedy równanie pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych, które łatwo można scałkować. Wtedy jednakże otrzymamy rozwiązanie w postaci uwikłanej i wystąpią tam całki tak zwane eliptyczne. Dyskusja takiego rozwiązania jest trudna i zawiła. Dlatego podamy tutaj rozwiązanie szczególne, które jest bardzo proste i ma wszystkie własności rozwiązania problemu w przypadku ogólnym. Dla ustalenia uwagi połączmy  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ . Łatwo sprawdzić, że funkcje

$$(13) \quad x(t) = y(t) = z(t) = \frac{1}{t_0 - t}$$

są rozwiązaniami naszych równań (6), z bardzo specjalnym warunkiem początkowym:



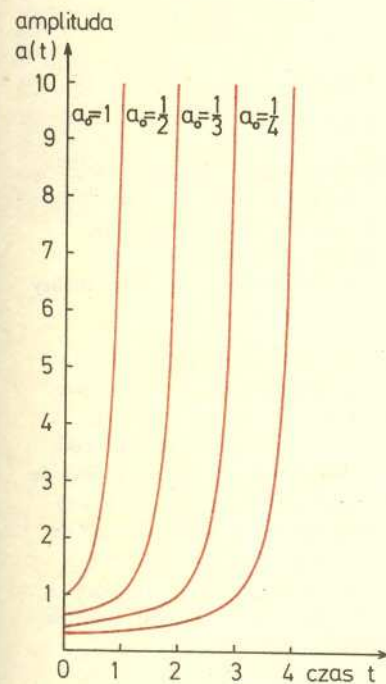
Przykład relacji rezonansowej

$$\omega^\alpha(k) = \frac{2\pi}{T_\alpha} = \frac{1}{6}$$

$$\omega^\beta(k_1) = \frac{2\pi}{T_\beta} = \frac{1}{10}$$

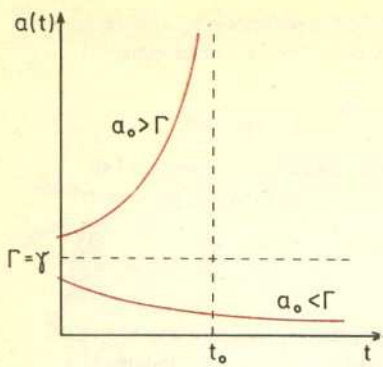
$$\omega^\gamma(k-k_1) = \frac{2\pi}{T_\gamma} = \frac{1}{15}$$

$T$  oznacza okres



Zależność amplitud od czasu opisana wzorem (13) dla

$$a_0 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$



Zależność amplitud od czasu w obecności tłumienia

$$a = e^{-\gamma t} \frac{1}{\tau_0 - \tau}$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t_0})$$

$$(14) \quad x(0) = y(0) = z(0) = \frac{1}{t_0},$$

co odpowiada równym zeru stałym  $C_1''$ ,  $C_2''$  we wzorze (12). Jak więc widzimy, nasze równanie ma rozwiązanie, które staje się nieograniczone dla skończonej chwili czasu  $t = t_0$ . Jak już mówiliśmy, zachowanie takie jest możliwe jedynie dla układu nieliniowego. Ze względu na ten nieograniczony wzrost w chwili  $t_0$ , zachowanie takie nosi nazwę niestabilności eksplozywnej.

Wróćmy teraz do sytuacji, w której istnieje tłumienie liniowe. Znow dla uproszczenia przyjmijmy, że wszystkie współczynniki (dekrementy) tłumienia są równe. Rozpatrzmy układ równań:

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\gamma x + yz \\ \dot{y} &= -\gamma y + xz \\ \dot{z} &= -\gamma z + xy \end{aligned}$$

Łatwo możemy zauważyć, że przez zamianę zmiennych:

$$(16) \quad \tau = \frac{1}{\gamma} \{1 - e^{-\gamma t}\} \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} x(\tau) &= e^{-\gamma t} X(\tau) \\ y(\tau) &= e^{-\gamma t} Y(\tau) \\ z(\tau) &= e^{-\gamma t} Z(\tau) \end{aligned}$$

układ można zapisać w postaci:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} X(\tau) &= Y(\tau) Z(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} Y(\tau) &= X(\tau) Z(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} Z(\tau) &= X(\tau) Y(\tau). \end{aligned}$$

Równania te są identyczne z układem (7), którego rozwiązania uprzednio badaliśmy. Możemy więc rozwiązania napisać w postaci:

$$(18) \quad X(\tau) = Y(\tau) = Z(\tau) = \frac{1}{\tau_0 - \tau} \quad \tau = \frac{1}{\gamma} \{1 - e^{-\gamma t}\}.$$

Zwróćmy tu uwagę na istotną różnicę w stosunku do rozwiązań (13) diskutowanych uprzednio.

A mianowicie zauważmy, że zmienna  $\tau$  zmienia się w skończonych granicach  $(0, \frac{1}{\gamma})$ . Tak więc, jeśli wartości początkowe, które wyznaczają czas eksplozji

$$(19) \quad X(0) = Y(0) = Z(0) = \frac{1}{\tau_0}$$

są mniejsze od wartości progowej

$$(20) \quad |X(0)| = |Y(0)| = |Z(0)| \leq \gamma,$$

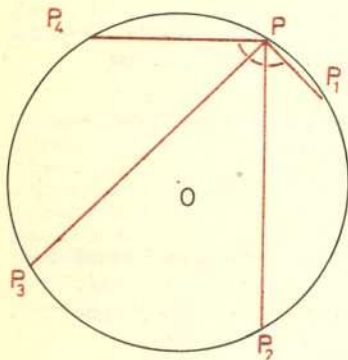
to rozwiązanie jest ograniczone dla wszystkich czasów. Dopiero gdy wartości początkowe amplitud przekroczą wartość progową (20), rozwiązanie eksploduje. Warto tu dodać, że podstawowe wnioski, takie jak: istnienie rozwiązania nieograniczonego oraz pojawienie się efektu progowego przy obecności tłumienia zostało potwierdzone w przypadkach ogólnych (różne dekrementy tłumienia lub szersza klasa warunków początkowych) bądź na drodze analizy numerycznej, bądź też w niektórych przypadkach przez analizę rozwiązań analitycznych.

Wydawać by się mogło, że omawiany problem jest problemem czysto akademickim. Jest przecież sprawą oczywistą, że można pisać równania o rozwiązaniach mających najdziwniejsze własności. Jednak w naszym wypadku nie jest aż tak źle. Istnieje szereg zjawisk fizycznych, w których oddziaływania nieliniowe fal odgrywają decydującą rolę. Omówimy tutaj jeden taki przykład, który odgrywa ważną rolę we współczesnej fizyce plazmy. Chodzi mi tutaj o nieliniowe oddziaływanie silnej fali elektromagnetycznej (mam tu na myśli np. wiązkę lasera dużej mocy) z falami plazmowymi. Takie oddziaływanie można sobie wyobrazić w ten sposób, że silne pole elektromagnetyczne fali polaryzuje plazmę i fale plazmowe będą się rozchodziły w ośrodku zmodyfikowanym w stosunku do plazmy bez pola. Uwzględniając tę modyfikację warunków propagacji fal plazmowych, znajdujemy współczynniki nieliniowego oddziaływania fal. Okazuje się, że w tym szczególnie ważnym wypadku również jest możliwy rezonans, tyle tylko, że czterech, a nie trzech fal. Równania są podobne, a co najważniejsze, występuje niestabilność eksplozywna. Nie należy jednak zapominać, że w przyrodzie występują fale różnych długości, które ze sobą jednocześnie oddziałują. Dlatego rozważania o oddziaływaniu jedynie trzech (czterech) fal są daleko idącą idealizacją sytuacji fizycznej, a pojawienie się niestabilności eksplozywnej — jedynie wskazówką, że oddziaływania nieliniowe mogą prowadzić do nowych ciekawych efektów.



**Rozwiązanie zadania M 138**

Zauważmy, że z założenia, iż wymienione w zadaniu punkty są różne, wynika, że rozłożone są one na okręgu w podanej kolejności. Niech  $O$  będzie środkiem okręgu.



Z twierdzenia o kącie wpisanym wynika,

$$\angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \angle P_3OP_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Trójkąty  $P_1OP_2$ ,  $P_2OP_3$ ,  $P_3OP_4$  a także  $P_4OP_1$  są więc przystającymi trójkątami prostokątnymi, skąd  $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4$ ,  $\angle P_1P_2P_3 = \angle P_2P_3P_4 = \angle P_3P_4P_1 = \angle P_4P_1P_2 = \frac{\pi}{4}$  i podobnie  $\angle P_2P_3P_4 = \frac{\pi}{2}$  zatem  $P_1P_2P_3P_4$  jest kwadratem.

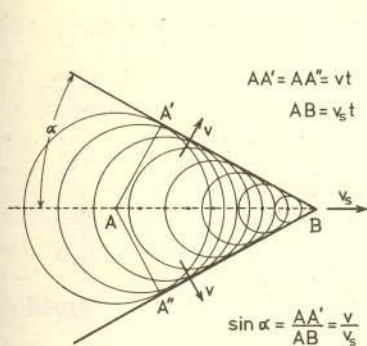
Tak na przykład badając nieliniowe oddziaływanie fali lasera z falami plazmowymi (o różnych długościach fal) dochodzimy do wniosku o istnieniu efektywnego mechanizmu przekazywania energii od fali lasera do plazmy. Na podstawie skomplikowanych rachunków mechanizm ten można sobie wyobrazić jako tworzenie się obszarów o obniżonej gęstości, które podczas ewolucji kurczą się gwałtownie. Zaburzenia zaś o małych wymiarach (krótkie fale) szybko się rozpadają (dysypują), a ich energia przechodzi w energię termiczną plazmy. Omówiliśmy tutaj ten przykład dosyć szczegółowo ze względu na jego znaczenie przy próbach otrzymania kontrolowanej reakcji termojądrowej na drodze grzania plazmy laserem. Jednak niestabilności omawianego typu odgrywają istotną rolę i w innych działach fizyki. Wydaje się, że zjawiska takie jak turbulencja i przejścia fazowe są wywołane podobnym mechanizmem. Widzimy więc, że omawiane oddziaływanie rezonansowe jest z jednej strony pięknym przykładem dziwnego zachowania układów nieliniowych, a z drugiej strony występuje w wielu zjawiskach fizycznych.

## Promieniowanie Czerenkowa

Doc. dr Jerzy BARTKE



Promieniowanie noszące obecnie nazwę promieniowania Czerenkowa ma bardzo interesującą historię. Maria Skłodowska-Curie i inni badacze promieniotwórczości zaobserwowali już na początku naszego stulecia, że roztwór soli radu oraz różne substancje przezroczyste umieszczone w pobliżu silnych preparatów promieniotwórczych emitują niebieskawe światło. Wiedzano już wtedy, że pod wpływem promieniowania ciał radioaktywnych wiele substancji świeci (zjawiska fluorescencji i fosforescencji), toteż nie przywiązywano do tego świecenia specjalnej wagi. Dopiero w 1934 r. P.A. Czerenkow rozpoczął systematyczne badanie tego zjawiska i odkrył szereg interesujących jego własności. Stwierdził on, że świecenie powstaje we wszystkich przezroczystych cieczach i ciałach stałych i że jest silnie asymetryczne — emitowane w kierunku promieniowania padającego. Własności te oraz polaryzacja badanego świecenia wskazywały na to, że nie jest to żaden ze znanych rodzajów luminescencji. Ponadto Czerenkow dowiódł, że świecenie powodowane jest przez elektrony wybijane z atomów przez promieniowanie gamma — tzw. elektrony komptonowskie (od nazwiska angielskiego fizyka Comptona), i natężenie świecenia jest proporcjonalne do długości przebiegu elektronów w ośrodku. I.M. Frank i I.E. Tamm podali w 1937r. teorię tego zjawiska opartą na klasycznej elektrodynamice. Pokazali oni, że mamy tu do czynienia z nowym rodzajem promieniowania, które jest emitowane w przypadku, gdy cząstka naładowana porusza się w ośrodku z prędkością większą niż prędkość rozchodzenia się światła (a więc fali elektromagnetycznej) w tym ośrodku. Z podobną sytuacją, w której również źródło zaburzenia porusza się w ośrodku szybciej niż powodowane przezeń zaburzenie, spotkaliśmy się już w aerodynamice, na przykładzie ruchu ciała w powietrzu z prędkością większą od prędkości dźwięku (pociski, samoloty ponaddźwiękowe). Była o tym mowa w numerze 10/1975 Delt. Sytuację wyjaśnia rys. 1.



Rys. 1

Oznaczmy przez  $v_s$  prędkość ruchu źródła, a przez  $v$  prędkość rozchodzenia się fali. Po upływie pewnego czasu  $t$  źródło fali przemieści się z  $A$  do  $B$  (odcinek  $AB = v_s \cdot t$ ), a fala emitowana w punkcie  $A$  dojdzie do punktu  $A'$  (odcinek  $AA' = v \cdot t$ ). Obwiednią wszystkich kolejno emitowanych fal jest stożek, którego oś pokrywa się z trajektorią źródła, a kąt rozwarcia spełnia zależność:

$$\sin \alpha = \frac{AA'}{AB} = \frac{v \cdot t}{v_s \cdot t} = \frac{v}{v_s}$$

Przenosząc te rozważania do przypadku cząstki poruszającej się z prędkością  $v_s = \beta c$  w ośrodku optycznym o współczynniku załamania światła  $n$ , mamy  $v = c/n$ ,  $\sin \alpha = 1/\beta n$ . Kąt emisji promieniowania względem kierunku ruchu cząstki wynosi  $\vartheta = 90^\circ - \alpha$ , mamy zatem

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n}$$

Wzór ten nosi nazwę wzoru Czerenkowa.