W teorii snopów badamy zbiory (dokładniej: przestrzenie topologiczne) wraz z pewnymi funkcjami określonymi na nich. Nieodróżnialne przestrzenie mogą stać się „odróżnialne", gdy własności przyporządkowanych im zbiorów funkcji będą różne. Będzie to zrozumiałe na przykładzie. Mówiliśmy, że topologia każdych dwu krzywych jest taka sama: z naszego topologicznego punktu widzenia krzywe są nieodróżnialne. Dotyczy to więc i „okręgu" S, opisanego równaniem $x^2+y^2 = 1$ i zbioru C o równaniu $x^3+y^3 = 1$.

Niech $f(x, y) = x+y$, $g(x, y) = xy$. Na „okręgu" S między funkcjami f i g zachodzi związek $f^2-2g-1 = 0$; zaś na C mamy $f^3-3fg-1 = 0$. Równanie wiążące f i g na S jest inne niż na C, jest odeń niezależne. Nasuwa się wniosek: algebraiczne własności zbiorów funkcji (wielomianowych) na S i na C są różne (mówimy, że pierścienie złożone z tych funkcji nie są izomorficzne). To właśnie odróżnia nasze dwie „krzywe". Możemy teraz prawie zupełnie dokładnie przedstawić pojęcie snopa funkcji. Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

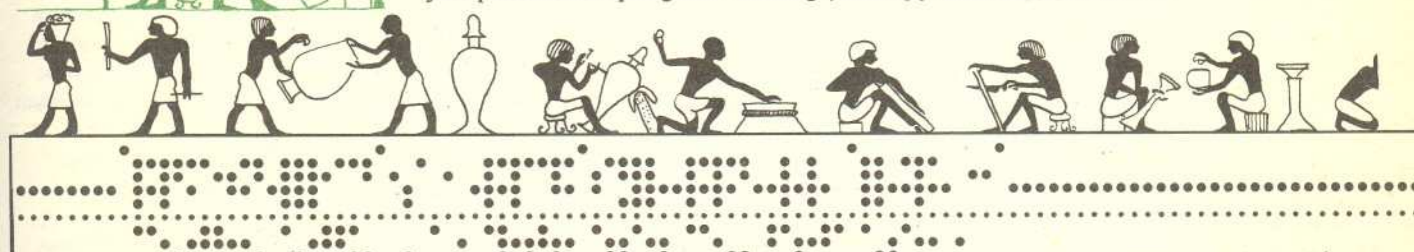
Przyporządkujmy każdemu zbiorowi otwartemu U w X zbiór $\mathcal{O}(U)$ złożony z funkcji ustalonego typu, określonych na U. Przykładem, który dobrze jest mieć przed oczami, jest $X = \mathbf{R}^n$, $\mathcal{O}(U) =$ $=$ zbiór funkcji ciągłych na U.

Zbiory $\mathcal{O}(U)$, przyporządkowane różnym zbiorom otwartym U, nie mogą być całkiem dowolne. Mianowicie, zakładamy, że

(*) $\begin{cases}\text{jeżeli } U \text{ jest sumą zbiorów } U_\iota, \text{ zaś } f_\iota \in \mathcal{O}(U_\iota) \text{ oraz gdy } (x \in U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2} \Rightarrow f_{\iota_1}(x) = f_{\iota_2}(x)),\\ \text{to istnieje jedna i tylko jedna funkcja } f \in \mathcal{O}(U), \text{ która po ograniczeniu do każdego ze}\\ \text{zbiorów } U_\iota, \text{ jest równa } f_\iota.\end{cases}$

Gdy warunek ten jest spełniony, mówimy, że $\mathcal{O}$ jest snopem na X. Podstawowym obiektem badań geometrii algebraicznej (a właściwie jej „geometrycznej" części) są nie same przestrzenie Zariskiego, ale te przestrzenie wraz ze snopami funkcji wielomianowych (ściślej: funkcji wymiernych, wszędzie określonych) na tych przestrzeniach. Ze zbiorem algebraicznym X wiążemy mianowicie snop określony następująco: $\mathcal{O}(U) =$ zbiór wszystkich funkcji wymiernych określonych na U. Takie funkcje można dodawać, odejmować i mnożyć, ale dzielenie dwóch funkcji wszędzie określonych na U nie musi być funkcją wszędzie określoną na U. $\mathcal{O}(U)$ nie jest więc ciałem, ale nieco uboższą strukturą algebraiczną, zwaną pierścieniem. Możemy powiedzieć, że $\mathcal{O}$ jest snopem pierścieni.

Dopiero po opisanym zabiegu (wprowadzeniu snopów funkcji) nasza geometryzacja abstrakcyjnej „geometrii' jest coś warta: np. określone wyżej krzywe S i C są nieodróżnialne jako przestrzenie topologiczne Zariskiego, ale mają różne snopy pierścieni $\mathcal{O}$.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 133. Długości krawędzi pewnego prostopadłościanu są kolejnymi liczbami naturalnymi, długość zaś krawędzi pewnego sześcianu jest też liczbą naturalną. Udowodnić, że objętości tego prostopadłościanu i sześcianu są różne.

Rozwiązanie na str. 13

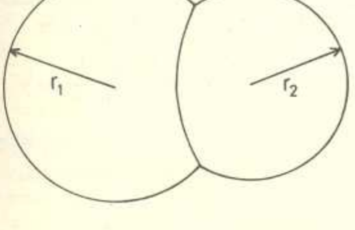
M 134. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna $\mathrm{H}(n) \leqslant n+4$ o tej własności, że zbiór $\{n+1, n+2, \ldots, n+\mathrm{H}(n)\}$ zawiera dwa podzbiory, mające równe iloczyny swoich elementów.

Rozwiązanie na str. 12

M 135. Udowodnić, że nie istnieją cztery kolejne liczby naturalne, z których każda jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od jedności.

Rozwiązanie na str. 12

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI



F 45. Dwie bańki mydlane, zanim się połączą, często tworzą pokazaną na rysunku bańkę pośrednią z błonką w środku. Znając wielkości r_1 i r_2 wyznaczcie promień krzywizny r_{12} błonki oddzielającej bańki.

Rozwiązanie na str. 15