Geometria algebraiczna -czyli jak sobie poradzić z nieciągłością w geometrii

Dr Michał SZUREK

Poczta NRD uczciła 200-lecie urodzin Karola Gaussa wydając znaczek, który reprodukujemy powyżej.

W poprzednim numerze powiedzieliśmy, że wzór

$$(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$$

może posłużyć jako *określenie* pochodnej wielomianu, którego współczynniki mogą być elementami zupełnie dowolnego ciała. Jest to dość osobliwa sytuacja, że umiemy różniczkować, nie poruszając uprzednio kwestii ciągłości, nie zastanawiając się, czy pojęciu ciągłości można nadać sens i w dowolnym, „abstrakcyjnym", przypadku. „Odważne" postępowanie formalne i tu przynosi efekty.

Wiemy, że funkcja rzeczywista f: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazem zbioru otwartego jest zawsze zbiór otwarty. Zbiory, będące dopełnieniami otwartych — to zbiory domknięte. Mają one następujące podstawowe własności:

a) zbiór pusty i cała przestrzeń są zbiorami domkniętymi,

b) część wspólna zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym,

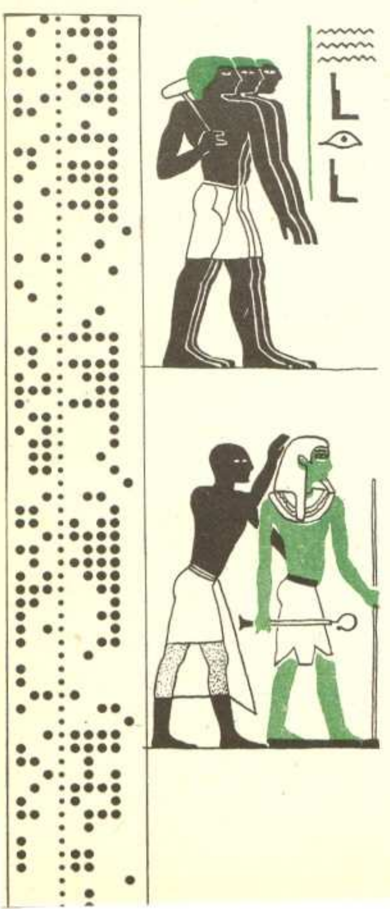
c) suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zawsze zbiorem domkniętym.

Nietrudno przekonać się, że podobne własności mają także zbiory algebraiczne — to znaczy zbiory, które można opisać układem równań wielomianowych. Umówmy się teraz, że za zbiory domknięte będziemy uważać tylko zbiory algebraiczne. Zdania **a**), **b**) i **c**) pozostają zatem prawdziwe przy nowym rozumieniu pojęcia „zbiór domknięty". Zbiór, którego pewne podzbiory *nazwaliśmy* domkniętymi i zrobiliśmy to tak, że spełnione są warunki **a**), **b**) i **c**) (zwane aksjomatami Kuratowskiego), nazywamy przestrzenią topologiczną. Przestrzeń, w której domkniętymi nazwaliśmy zbiory algebraiczne, nazywa się przestrzenią Zariskiego. W każdej przestrzeni topologicznej zbiorami otwartymi nazywamy te zbiory, których dopełnienia są domknięte. Funkcjami ciągłymi nazywamy zaś te funkcje, dla których przeciwobrazem zbioru otwartego przeciwdziedziny jest zawsze zbiór otwarty. W przestrzeni Zariskiego funkcje wielomianowe są w tym sensie ciągłe i oto w pewnym stopniu zrekonstruowaliśmy następne pojęcie analizy matematycznej — ciągłość.

Topologia Zariskiego oddaje w geometrii algebraicznej nieocenione usługi: wiele „algebraicznych" własności równań da się sformułować w terminach topologicznych. Przykładowo, krzywa opisana równaniem $f(x, y) = 0$ „składa się z jednego kawałka" (uwaga dla wyrobionych matematycznie Czytelników: nie mylić ze spójnością, tu chodzi o nieprzywiedlność!) wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wielomianem nierozkładalnym (np. zbiór rozwiązań równania $xy = 0$ składa się z dwóch prostych, tylko „zaczepionych" o siebie). Twierdzenie to jest w całej ogólności prawdziwe tylko wtedy, gdy o ciele K (to znaczy o ciele, z którego czerpiemy współczynniki i w którym szukamy rozwiązań) założymy, że jest algebraicznie domknięte, na przykład jest ciałem wszystkich liczb zespolonych. Ciałem algebraicznie domkniętym nazywamy bowiem ciało, w którym każdy, różny od stałej, wielomian $f(x)$ ma pierwiastek.

Największą ceną, jaką płacimy za możliwość efektywnej geometryzacji zupełnie abstrakcyjnych przypadków, jest właśnie to, że niektóre twierdzenia naszej „geometrycznej" teorii nie są prawdziwe dla podzbiorów algebraicznych przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^m$ (ciało wszystkich liczb rzeczywistych nie jest bowiem algebraicznie domknięte) i stają się prawdziwe dopiero wtedy, gdy przypomnimy sobie o liczbach zespolonych. Czytelnik spotkał się, być może, ze zwrotem: rozwiązaniem równania $x^2+y^2 = 0$ są dwie „proste urojone" $x+iy = 0$ oraz $x-iy = 0$. Ten zwrot nabiera sensu dopiero wtedy, gdy przypomnimy sobie o zbiorach algebraicznych zespolonych. Mimo to możliwość stosowania metod geometrycznych w abstrakcyjnej sytuacji algebraicznej jest ciekawa i ważna, choćby dlatego, że znajduje zastosowanie w algebrze ogólnej, ożywiając nieco „suche" pojęcia algebraiczne. Ponadto podobne metody są bardzo pomocne w algebraicznej teorii liczb.

Topologia Zariskiego ma i wady — jest zbyt uboga! Na przykład wszystkie krzywe (opisane przez wielomiany nierozkładalne) mają tę samą topologię Zariskiego — jedynymi właściwymi podzbiorami domkniętymi takich krzywych są zbiory skończone, i nie odnieślibyśmy wielkich korzyści, ograniczając się do czysto topologicznych rozważań. Zagadnienie znalezienia bardziej precyzyjnych metod, czy też (ciągnąc nasze porównanie z poprzedniego numeru) doprowadzenie prądu analizy matematycznej do geometrii algebraicznej i przystosowanie jej urządzeń do pracy na prąd, zostało rozwiązane dopiero w połowie lat pięćdziesiątych. Decydujący krok postawił w 1955 r. jeden z najbardziej znanych dziś matematyków, Francuz Jean-Pierre Serre. Zastosował on w abstrakcyjnej geometrii algebraicznej tak zwaną teorię snopów. Podstawy tej teorii opracował inny matematyk francuski, Leray, w czasie pobytu w niemieckim obozie jenieckim.



W teorii snopów badamy zbiory (dokładniej: przestrzenie topologiczne) wraz z pewnymi funkcjami określonymi na nich. Nieodróżnialne przestrzenie mogą stać się „odróżnialne", gdy własności przyporządkowanych im zbiorów funkcji będą różne. Będzie to zrozumiałe na przykładzie. Mówiliśmy, że topologia każdych dwu krzywych jest taka sama: z naszego topologicznego punktu widzenia krzywe są nieodróżnialne. Dotyczy to więc i „okręgu" S, opisanego równaniem $x^2+y^2 = 1$ i zbioru C o równaniu $x^3+y^3 = 1$.

Niech $f(x, y) = x+y$, $g(x, y) = xy$. Na „okręgu" S między funkcjami f i g zachodzi związek $f^2-2g-1 = 0$; zaś na C mamy $f^3-3fg-1 = 0$. Równanie wiążące f i g na S jest inne niż na C, jest odeń niezależne. Nasuwa się wniosek: algebraiczne własności zbiorów funkcji (wielomianowych) na S i na C są różne (mówimy, że pierścienie złożone z tych funkcji nie są izomorficzne). To właśnie odróżnia nasze dwie „krzywe". Możemy teraz prawie zupełnie dokładnie przedstawić pojęcie snopa funkcji. Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

Przyporządkujmy każdemu zbiorowi otwartemu U w X zbiór $\mathcal{O}(U)$ złożony z funkcji ustalonego typu, określonych na U. Przykładem, który dobrze jest mieć przed oczami, jest $X = \mathbf{R}^n$, $\mathcal{O}(U) =$ $=$ zbiór funkcji ciągłych na U.

Zbiory $\mathcal{O}(U)$, przyporządkowane różnym zbiorom otwartym U, nie mogą być całkiem dowolne. Mianowicie, zakładamy, że

(*) $\left\{\begin{array}{l}\text{jeżeli } U \text{ jest sumą zbiorów } U_\iota,\text{ zaś } f_\iota \in \mathcal{O}(U_\iota) \text{ oraz gdy } (x \in U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2} \Rightarrow f_{\iota_1}(x) = f_{\iota_2}(x)),\\ \text{to istnieje jedna i tylko jedna funkcja } f \in \mathcal{O}(U), \text{ która po ograniczeniu do każdego ze}\\ \text{zbiorów } U_\iota, \text{ jest równa } f_\iota.\end{array}\right.$

Gdy warunek ten jest spełniony, mówimy, że $\mathcal{O}$ jest snopem na X. Podstawowym obiektem badań geometrii algebraicznej (a właściwie jej „geometrycznej" części) są nie same przestrzenie Zariskiego, ale te przestrzenie wraz ze snopami funkcji wielomianowych (ściślej: funkcji wymiernych, wszędzie określonych) na tych przestrzeniach. Ze zbiorem algebraicznym X wiążemy mianowicie snop określony następująco: $\mathcal{O}(U) =$ zbiór wszystkich funkcji wymiernych określonych na U. Takie funkcje można dodawać, odejmować i mnożyć, ale dzielenie dwóch funkcji wszędzie określonych na U nie musi być funkcją wszędzie określoną na U. $\mathcal{O}(U)$ nie jest więc ciałem, ale nieco uboższą strukturą algebraiczną, zwaną pierścieniem. Możemy powiedzieć, że $\mathcal{O}$ jest snopem pierścieni.

Dopiero po opisanym zabiegu (wprowadzeniu snopów funkcji) nasza geometryzacja abstrakcyjnej „geometrii' jest coś warta: np. określone wyżej krzywe S i C są nieodróżnialne jako przestrzenie topologiczne Zariskiego, ale mają różne snopy pierścieni $\mathcal{O}$.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 133. Długości krawędzi pewnego prostopadłościanu są kolejnymi liczbami naturalnymi, długość zaś krawędzi pewnego sześcianu jest też liczbą naturalną. Udowodnić, że objętości tego prostopadłościanu i sześcianu są różne.

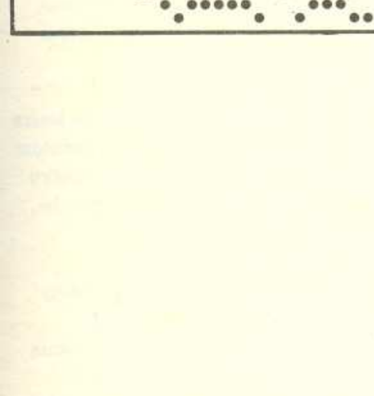
Rozwiązanie na str. 13

M 134. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna $\mathrm{H}(n) \leqslant n+4$ o tej własności, że zbiór $\{n+1, n+2, \ldots, n+\mathrm{H}(n)\}$ zawiera dwa podzbiory, mające równe iloczyny swoich elementów.

Rozwiązanie na str. 12

M 135. Udowodnić, że nie istnieją cztery kolejne liczby naturalne, z których każda jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od jedności.

Rozwiązanie na str. 12



Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 45. Dwie bańki mydlane, zanim się połączą, często tworzą pokazaną na rysunku bańkę pośrednią z błonką w środku. Znając wielkości r_1 i r_2 wyznaczcie promień krzywizny r_{12} błonki oddzielającej bańki.

Rozwiązanie na str. 15