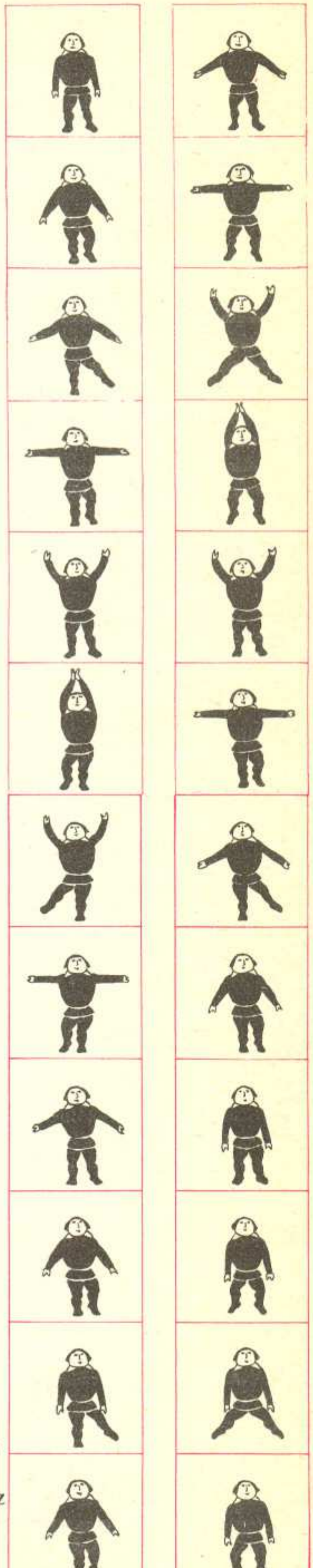
mała delta

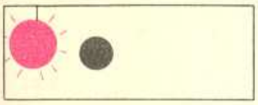
Nie ufaj własnym oczom.

Są tak zbudowane, że możemy sztucznie wywołać wrażenie ruchu tam, gdzie go nie ma i wrażenie spoczynku tam, gdzie ruch jest. W kinie poza taśmą filmową nic się nie rusza. Operator wyświetla szybko po sobie następujące nieruchome obrazy. Oko odbiera ten zalew obrazków różniących się każdy nieznacznie jeden od drugiego jako ruch na ekranie. To samo zjawisko zwane efektem stroboskopowym możesz zbadać za pomocą jakiejkolwiek, byle dość grubej książki, lepsza jest książka z miękkimi okładkami. Na marginesie „Delty" narysowano szereg obrazków. Możesz je wyciąć i nakleić w górnym lewym rogu kolejnych parzystych stron książki. Przewertuj teraz bardzo szybko karty książki. Mądrzej by było, gdybyś narysował kolejne rysunki sam i bezpośrednio w książce, gdyż dodatkowa warstwa papieru i kleju utrudnia obserwowanie efektu. Efekt stroboskopowy to także zjawisko odwrotne. Szybki proces ciągły możemy zamienić na serię oddzielnych nieruchomych obrazów. Wykonaj doświadczenie.

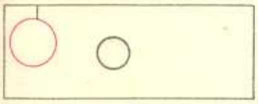


Badamy spadanie kropel wody

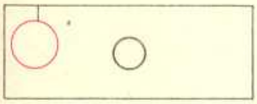
Jak dobrze wiesz, kropla swobodnie puszczona spada tak szybko, że okiem nie można prześledzić jej ruchu. Można to jednak zrobić, stosując tzw. lampę błyskową. Lampa taka zapala się bardzo często, np. 50 razy w ciągu sekundy, na bardzo krótką chwilę, np. 1/1000 s. Co będziemy widzieć, jeżeli w jej świetle szybko porusza się jakieś ciało, np. kulka z dużą prędkością toczy się po stole? Przedstawia to rysunek. Oko nie rozróżnia tak krótkich błysków, jak te, które omawiamy. Zamiast poruszającej się kulki widzimy więc pozornie równocześnie kilka nieruchomych kulek — w tych położeniach, w których kulka znajdowała się wtedy, kiedy lampa świeciła. Jeżeli lampa błyska równomiernie, z odległości pomiędzy obrazami możemy wnioskować, czy ciało porusza się ze stałą prędkością, czy zwalnia, czy przyspiesza.
Skąd wziąć lampę błyskową? Prawie każdy z nas ma ją w domu — jest nią po prostu ekran telewizora. Dla zwiększenia efektu dobrze jednak przesłonić go (np. ciemnym papierem) tak, aby światło wydostawało się z poziomego paska o szerokości 2–3 cm. Należy przy tym nastawić jasność na maksimum, a doświadczenie robić w ciemnym pokoju, żeby nie było żadnych innych źródeł światła.



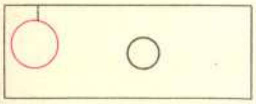
Jasno — widać kulkę



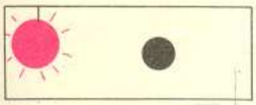
Ciemno — nic nie widać



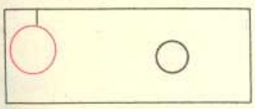
Ciemno — nic nie widać



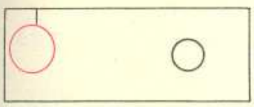
Ciemno — nic nie widać

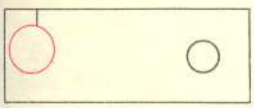


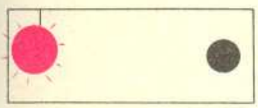
Jasno — widać kulkę



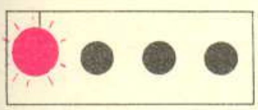
Ciemno — nic nie widać





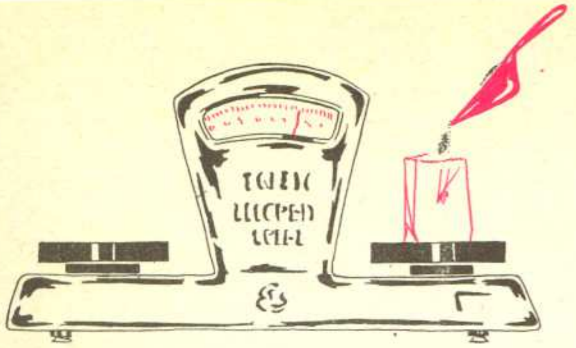


Jasno — widać kulkę



Tak widzimy

Możesz już teraz obejrzeć spadanie kropel wody w świetle błyskowym. Krople najłatwiej uzyskasz, mocząc kawałek szmatki i pozwalając wodzie swobodnie spływać (nie mocz za bardzo — żeby woda nie leciała ciurkiem). Nie zapomnij podstawić miednicy albo chociaż talerza, żeby nie zalać podłogi!



Na długim podjeździe kierowca redukuje bieg. Autobus pnie się powoli do góry. Wyższego biegu wrzucić nie sposób — nie starczy mocy silnika. Na niskim biegu jazda jest denerwująco powolna. Przydałby się bieg pośredni, a najlepiej taka konstrukcja skrzyni biegów, która pozwoliłaby na ciągłą regulację przełożenia.
Zjawiska przebiegające w sposób ciągły mają zalety, z których chętnie korzystamy. Oto kilka przykładów.

Ważenie cukru

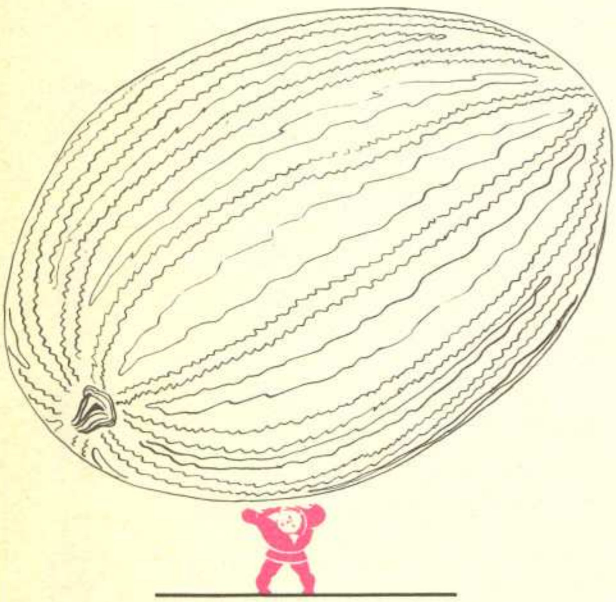
Trzeba odważyć kilogram cukru. Nic prostszego. Sypiemy cukier do torebki ustawionej na szalce i obserwujemy wskazówkę wagi. W miarę jak zbliża się ona do podziałki oznaczającej kilogram sypiemy cukier coraz mniejszym strumieniem. Przy wprawie osiągniemy zamierzony cel szybko i bez potrzeby odsypywania z torebki nadmiaru cukru.
O wiele trudniej odważyć kilogram jabłek, toteż często kupujemy nieco mniej lub nieco więcej, niż to pierwotnie zaplanowaliśmy.

Podlewanie ogródka

Podlewamy wężem ogrodniczym drzewko rosnące 15 metrów od miejsca, gdzie stoimy. Teraz chcemy podlać krzak rosnący 5 metrów bliżej. Nic trudnego. Stopniowo zmniejszamy kąt, pod jakim podniesiony jest wylot węża, i bez trudu trafiamy do celu. Łatwo się przekonać, że na przykład trafić kamieniem jest o wiele trudniej.

Regaty

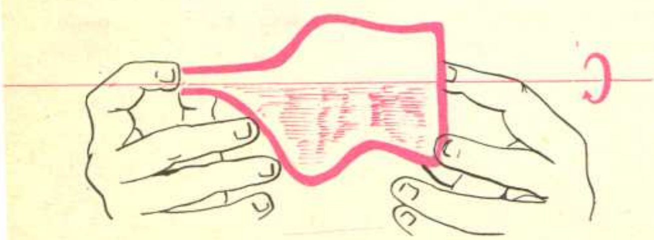
Po zwrocie sternik ustalił kurs łodzi i manewruje żaglem szukając takiego ustawienia, żeby łódź płynęła jak najszybciej. Oczywiście wiele zależy od zręczności i doświadczenia jednakże ogólna zasada jest taka sama, jak w poprzednich przykładach. Metodą małych zmian poszukujemy optymalnego położenia.



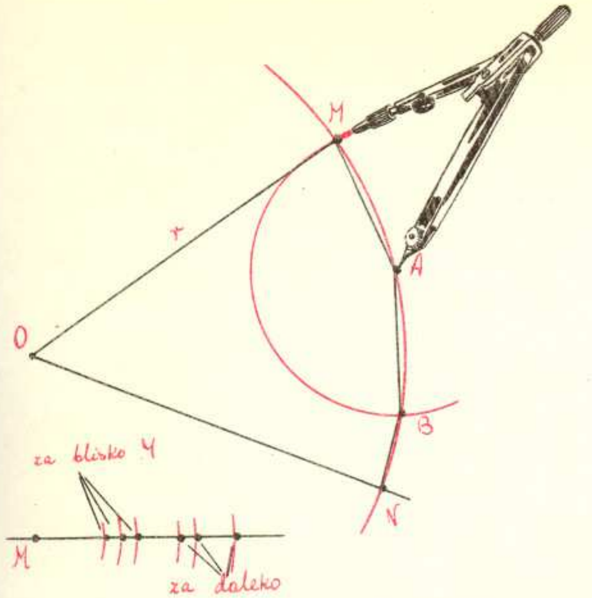
Jak odlać połowę zawartości butelki

Butelka o bardzo nieregularnym kształcie jest pełna wody. Trzeba odlać połowę jej zawartości.
Ilość odlanej wody można porównać z ilością wody, która pozostała w butelce w taki sposób:
Ustawiamy butelkę poziomo tak, aby powierzchnia wody przechodziła przez środek otworu butelki. Palcem drugiej ręki zaznaczamy poziom wody po przeciwnej stronie, to jest na denku. Następnie obracamy butelkę o 180° wokół osi wyznaczonej przez położenie obu palców. Jeśli wylaliśmy mniej niż połowę zawartości, powierzchnia wody po obrocie butelki będzie powyżej palców (dlaczego?). Co robić dalej, już wiadomo.
Te proste przykłady ilustrują praktyczne pożytki płynące z tego, że pewne zjawiska mają charakter ciągły. Przenieśmy się teraz na grunt matematyki.

Dzielimy kąt na trzy równe części



Znawcy geometrii odpowiedzą, że podział kąta na trzy równe części jest konstrukcją niewykonalną (cyrklem i linijką).
Zgoda. Ponieważ jednak płaszczyzna ma własność ciągłości, półproste takiego podziału potrafimy przybliżyć z dowolną dokładnością stosując odpowiednie metody. Są one zresztą bardzo proste.



Oto przepis.
Kreślimy okrąg o środku w wierzchołku dzielonego kąta i o dowolnym promieniu r. Punkty przecięcia się tego okręgu z ramionami kąta oznaczmy literami M i N. Każdy podział kąta na trzy (niekoniecznie równe) części wyznacza trzy cięciwy:

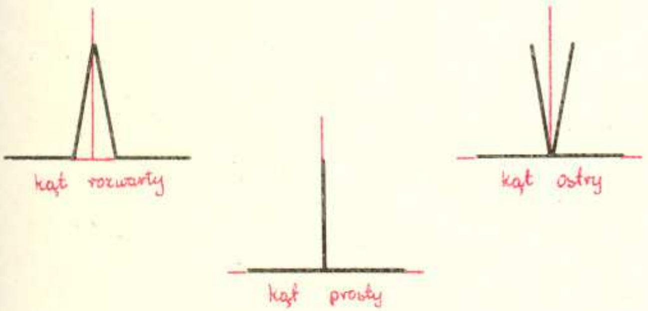
$$\overline{MA}, \quad \overline{AB}, \quad \text{i} \quad \overline{BN}.$$

Za pomocą cyrkla obierzmy na łuku MN punkt A dowolnie, a punkt B w taki sposób, żeby cięciwy MA i AB były równe. Jeśli trzecia cięciwa BN jest mniejsza od pozostałych, oznacza to, że punkt A trzeba przesunąć bliżej punktu M.

Wypróbujmy różne długości dla cięciwy $\overline{MA}$ i notujmy otrzymane wyniki na pomocniczym rysunku. Zręczne ręce, dokładny cyrkiel i odrobina wprawy wystarczą, żeby otrzymany podział kąta był dobrym przybliżeniem podziału na trzy równe części.

Zadania

1. Mamy trzy pręty i zaciski do ich łączenia. Jesteśmy na boisku, nie mamy żadnych przyrządów. Możemy jednak rysować na ziemi. Jak zbudować z prętów dostatecznie dobre przybliżenie kąta prostego? Może pomoże rysunek?



2. Jak zbudować siedmiokąt foremny (dobre przybliżenie tej figury)?

3. Mamy rozregulowaną poziomnicę (ze śrubkami do regulacji) oraz stół z regulowanym nachyleniem blatu. Oto dwa zadania: po pierwsze, wyregulować poziomnicę, po drugie, ustawić blat stołu poziomo.

4. Zadanie tylko na minikalkulator
Wiadomo, że równanie

$$2x^3-8x^2+8x-1 = 0$$

ma dokładnie trzy pierwiastki. Pierwszy z nich jest zawarty między 0 a 1, drugi między 1 a 2 i trzeci między 2 a 3.
Wyznaczcie z dokładnością do 4 miejsc po przecinku jeden z nich.

Małą Deltę opracowali: Jerzy GINTER, Tomasz HOFMOKL i Przemysław NOWICKI

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 130. Udowodnić, że jeżeli funkcja F przekształcająca przedział $\langle a, b\rangle$ w przedział $\langle a, b\rangle$ jest ciągła, to ma punkt stały (tzn. istnieje $x \in \langle a, b\rangle$, dla którego $F(x) = x$).
Rozwiązanie na str. 6

M 131. Czy istnieje funkcja $f\colon R \to R$ ciągła w jednym tylko punkcie?
Rozwiązanie na str. 6

M 132. Wykazać, że funkcja g: $R \times R \to R$ określona wzorami

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad g(0, 0) = 0$$

jest ciągła względem każdej zmiennej (przy ustalonej wartości pozostałej zmiennej), ale jako funkcja dwóch zmiennych jest nieciągła w punkcie (0, 0).
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 44. Rozważmy cienką, płaską płytę dowolnego kształtu, niekoniecznie jednorodną. Niech O oznacza określony punkt tej płyty. Wykaż, że spośród osi leżących w płaszczyźnie płyty i przechodzących przez punkt O zawsze można wybrać takie dwie osie wzajemnie prostopadłe, że moment bezwładności płyty względem tych osi będzie taki sam.
Rozwiązanie na str. 5