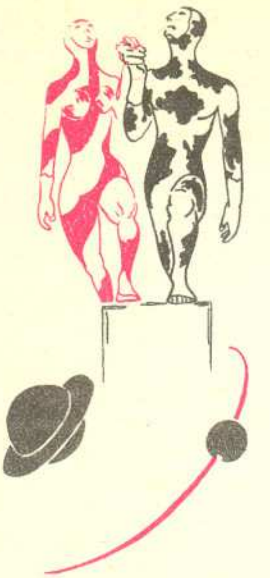
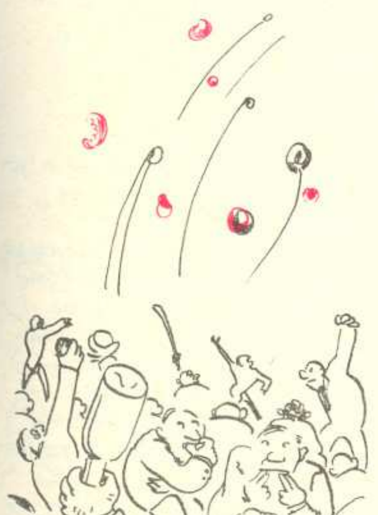


energii. Wszystkie wyższe nie są trwałe, gdyż z emisją fotonu „rozpadają się" one, przechodząc do stanów niższych. Zgodnie zaś z zasadami tejże mechaniki kwantowej, układ fizyczny nietrwały nie może mieć dokładnie określonej energii (podobnie jak układ o określonym pędzie nie może mieć dokładnie określonego położenia), przy czym iloczyn średniego czasu życia przez nieokreśloność energii jest rzędu stałej Plancka $\hbar$. Dyskretne poziomy energii ulegają więc rozmyciu czy też poszerzeniu, i ciągłość zostaje przywrócona. Co prawda nie dotyczy to poziomu najniższego, ale tylko w przypadku pojedynczego odosobnionego atomu. W zwykłym gazie, choćby bardzo rozrzedzonym, przejścia między poziomami energii zachodzą nie tylko w wyniku emisji fotonów, ale też w wyniku zderzeń międzyatomowych, które powodują dwukierunkowy przepływ energii — od energii kinetycznej ruchu atomów do energii wewnętrznego ruchu elektronów w poszczególnych atomach i na odwrót. W rezultacie wszystkie poziomy energetyczne ulegają dodatkowemu poszerzeniu. A więc i tu mamy do czynienia z przebiegami ciągłymi.
Właściwie jedyną rzeczą naprawdę nieciągłą w świecie mechaniki kwantowej jest to, czego w niej najbardziej nie rozumiemy. Mam na myśli akt pomiaru. Weźmy jako przykład elektron, poruszający się z ustalonym pędem, a więc mający całkowicie nie ustalone położenie. Wyobraźmy sobie teraz, że na elektronie tym wykonujemy pomiar jego położenia. W rezultacie sytuacja *skokowo* zmieni się: położenie elektronu zostanie ustalone, ale jego pęd utraci swą dotychczasową wartość, stając się wielkością mniej lub bardziej nieokreśloną, zależnie od tego, jak dokładnie określiliśmy położenie elektronu. W rzeczywistości akt pomiaru zajmuje jakiś czas i tkwi za tym jakiś efekt fizyczny. Nie jest on jednak ujmowany w formalizmie mechaniki kwantowej, co chyba należy uważać za jej najsłabszy punkt od strony pojęciowej.
Uwagi te można by jeszcze rozwinąć. Wydaje mi się jednak, że już to, co tu zostało powiedziane, wystarcza do sformułowania następujących wniosków. Po pierwsze, w fizyce, jak i w każdej innej nauce przyrodniczej, tkwi szereg założeń metodologicznych, nie usprawiedliwionych metodami uznawanymi za poprawne przez tę naukę. Wymienialiśmy tu wygodę, prostotę, piękno, intersubiektywność, ogólność (większa sprawdzalność), a listę tę można by przedłużyć. Zagadnienie ciągłości zwraca nam uwagę na dodatkowy kapitalny fakt: że w budowie aparatu pojęciowego nauki jesteśmy także uwarunkowani charakterem naszego aparatu zmysłowego. Niezależnie od złożoności formalizmu, gdzieś, kiedyś przychodzi moment, że chcemy sobie wyobrazić zjawiska formalizmem tym opisywane. I tu łatwiej przychodzi nam zdecydować się na rozwiązania „wyobrażalne" niż na te, które są sprzeczne ze strukturą naszego umysłu i aparatu zmysłowego. Tak właśnie postępujemy, przyjmując ciągłość za normę. Starałem się wykazać, że takie założenie w odniesieniu do przestrzeni i czasu niemal automatycznie pociąga za sobą ciągłość naszego obrazu zjawisk fizycznych. Pozostaje nieroztrzygnięte nieco może metafizyczne pytanie, czy „uciąglająca" natura naszego aparatu zmysłowego jest jakimś po prostu ułatwieniem technicznym, czy też jest genetycznie dostosowana do prawdziwej, głębokiej ciągłości natury.

Geometria algebraiczna— —czyli jak poradzić sobie z nieciągłością w geometrii

Dr Michał SZUREK



W tym artykule zastanawiamy się, czy można oprzeć geometrię o tak „nieciągłe" zbiory, jak na przykład zbiór liczb wymiernych lub zbiór skończony. Nie będą to rozważania pod hasłem: co by można..., lecz opis drogi, jaką rzeczywiście przebyto w matematyce; dokładniej — w geometrii algebraicznej — jednym z jej starszych działów.

§ 1. W XVII wieku dokonał się przełom w geometrii. Francuski matematyk René Descartes (Kartezjusz) odkrył, że linia prosta może być opisana na płaszczyźnie równaniem stopnia pierwszego, a w przestrzeni — układem dwóch równań. Dało to początek geometrii analitycznej. Metoda Kartezjusza umożliwiła — w połączeniu z rozwijanym równolegle rachunkiem różniczkowym — badania, które w euklidesowym wydaniu teorii były trudne a często i niewykonalne. Już w teorii najprostszych krzywych, jakimi są stożkowe, wiele zadań da się rozwiązać tylko metodami geometrii analitycznej. Przy badaniu bardziej skomplikowanych krzywych i powierzchni praktycznie posługujemy się wyłącznie metodami geometrii analitycznej i analizy matematycznej, wspieranymi wyobraźnią przestrzenną. Wszelkie zaś metody badawcze oparte na analizie matematycznej wykorzystują ciągłość zbioru liczb rzeczywistych. Na przykład takie punkty charakterystyczne krzywej jak ostrza, punkty nagłej zmiany krzywizny, punkty przegięcia, punkty styczności z prostymi — są określane analitycznie, a zatem wykorzystują (w ukrytej, lecz istotnej formie) tę ciągłość.

§ 2. W 1871 roku niemiecki matematyk Richard Dedekind nazwał ciałem każdy zbiór liczb, w którym wykonalne są cztery podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (dzielenie przez 0 wykluczamy raz na zawsze). Ciało tworzą na przykład liczby wymierne, rzeczywiste, zespolone, ... W wyniku wymienionych działań na liczbach wymiernych (rzeczywistych, zespolonych, ...) dostajemy znów liczbę wymierną (rzeczywistą, zespoloną, ...). Podane przez Dedekinda określenie potem nieco uogólniono i ciałem nazwano dowolny zbiór, w którym określone są działania *zwane* dodawaniem, mnożeniem, odejmowaniem i dzieleniem. Postulujemy tylko, by te działania miały podobne (tu wyliczamy, jakie) własności, które przysługują ich odpowiednikom w zbiorach liczbowych. Przykładowo, działanie nazwane mnożeniem ma zawsze być rozdzielne względem działania nazwanego dodawaniem. Ciało może mieć nawet skończoną liczbę elementów: rozpatrzmy zbiór Z_p złożony z liczb $0, 1, ..., p-1$. O liczbie p zakładamy, że jest pierwsza. Umówmy się, że sumą dwu liczb z Z_p będziemy nazywać resztę z dzielenia ich „zwykłej" sumy przez p. Przykładowo, w Z_{31} mamy $28+7 = 4$ (nic dziwnego, „35 maj" to „4 czerwiec"). Podobnie mnożymy i odejmujemy liczby z Z_p. Dzielenie zaś jest działaniem odwrotnym do mnożenia. W każdym ciele możemy badać i rozwiązywać równania algebraiczne takie, jak np. $ax^2+bx+c = 0$, a także interesować się wykresami funkcji $y = ax+b$, $y = x^2$ i podobnych. Możemy też badać zbiory określone równaniami algebraicznymi, np. „okrąg" $x^2+y^2 = 1$.

§ 3. Geometria algebraiczna bada własności zbiorów, określonych równaniami algebraicznymi (lub układami takich równań). Takie zbiory nazywamy *algebraicznymi*. Są nimi na przykład wszystkie stożkowe, krzywa otrzymana przez przecięcie dwóch walców, powierzchnia kuli, paraboloida i powierzchnia torusa. Zbiorami algebraicznymi są też proste, płaszczyzny i punkty. Na światowym kongresie matematyków w 1908 roku Henri Poincaré zwrócił uwagę, że w badaniu równań z dwiema niewiadomymi może być użyteczna teoria krzywych algebraicznych. Równanie z dwiema niewiadomymi może być przecież traktowane jako równanie pewnej krzywej na płaszczyźnie. Ale teoria takich krzywych przyda się tylko wtedy, gdy interesujemy się wszystkimi rozwiązaniami rzeczywistymi lub zespolonymi danych równań — a nie na przykład tylko rozwiązaniami wymiernymi, całkowitymi lub pochodzącymi z pewnego abstrakcyjnego ciała. W tym ostatnim przypadku całe bogactwo geometrii analitycznej, analizy matematycznej czy geometrii różniczkowej jest *a priori* tak samo użyteczne, jak żarówka, piła elektryczna lub elektryczna maszynka do golenia w afrykańskim buszu. Aby móc wykorzystać dobrodziejstwa elektryczności, należy postarać się o prądnicę, a do tego czasu musimy oświetlać świeczką, piłować ręcznie a golić się żyletką.

Geometria algebraiczna XIX wieku osiągnęła wiele interesujących wyników, posługując się „naturalną" geometryczną strukturą badanych zbiorów i podpierając się w trudniejszych momentach analizą matematyczną. W chwili, gdy zdano sobie sprawę, że polem badań mogą i powinny być zbiory algebraiczne określone nad dowolnymi ciałami (liczbowymi lub zupełnie abstrakcyjnymi), zaczęto poszukiwać innych sposobów badania takich zbiorów, bowiem urządzenia napędzane prądem dotychczasowej geometrii analitycznej i analizy matematycznej zdawały się bezużyteczne. Czy można bowiem sensownie mówić np. o ciągłości czy różniczkowalności funkcji określonych na ciałach $\mathbf{Z}_p$?

W 1882 roku Dedekind i Weber zauważyli, że pewne rezultaty teorii krzywych algebraicznych nie zależą od ciała, z którego pochodzą współczynniki równania (równań) opisującego krzywą. Przyporządkowali oni każdej krzywej ciało funkcji wymiernych, określonych na tej krzywej. Badanie krzywych zostało sprowadzone do badania ich ciał funkcji wymiernych i w ten sposób teoria krzywych (a wkrótce i cała geometria algebraiczna) stała się pewnym działem algebry abstrakcyjnej. Od metod „geometrycznych" oddalono się znacznie, nie mogąc ich stosować (a raczej: sensownie naśladować). Dopiero w początkach lat pięćdziesiątych pojawiły się propozycje, jak z powrotem „zgeometryzować geometrię algebraiczną", twórczo symulując te pojęcia, do których wprowadzenia jest (wydaje się) niezbędna ciągłość podstawowego ciała. To właśnie chcemy opisać.

§ 4. Znamy wszyscy wzór na pochodną dowolnego wielomianu:

$$(a_nx^n+ \dots +a_1x+a_0)' = na_nx^{n-1}+ \dots +a_1 .$$

Nasuwa się myśl: przyjmijmy ten wzór za *określenie* pochodnej dowolnego wielomianu. Współczynniki jego mogą być elementami zupełnie dowolnego ciała. Nie interesuje nas, czy w tym ciele pojęcie granicy (niezbędne do analitycznego określenia pochodnej) ma sens, czy nie. Po prostu umawiamy się, że na przykład pochodną wielomianu $x^{34}+14x^4+7x^3+5x+1$ o współczynnikach z Z_{31} jest $3x^{33}+25x^3+21x^2+5$. Wiele wzorów różniczkowania (na przykład wzory na pochodną sumy, różnicy i iloczynu) zachowuje prawdziwość (zadanie dla Czytelników: jak to można prosto udowodnić?). Pojawiają się jednak pewne kłopoty. Musimy na przykład (w niektórych przypadkach) sztucznie odróżniać wielomian (*wyrażenie* $a_nx^n+ \dots +a_1x+a_0$) od funkcji wielomianowej (funkcji $x \to a_nx^n+ \dots +a_1x+a_0$). Mimo to można odnieść wrażenie, że oto przed nami prosta droga do przeniesienia pojęć i metod analizy matematycznej na najbardziej nawet abstrakcyjne przypadki (jeżeli ograniczyć się do wielomianów). Przykładowo, styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie (x_0, y_0) możemy określić jako zbiór rozwiązań równania

$$y = y_0+(x-x_0)f'(x),$$

naśladując tym „zwykłe" pojęcie stycznej. Rysunek pokazuje „prostą styczną" do „paraboli" $y = x^2$ w punkcie (6, 5) „płaszczyzny" Z_{31}^2. Nie wszystko da się jednak tak gładko sformalizować. Co gorsze, często taka formalizacja jest możliwa, ale niczemu nie służy. Napiszemy o tym w następnym numerze.

Wykładnik potęgi należy rozumieć jako „zwykłą" liczbę naturalną (nie w ciele Z_p). Symbol ka należy więc rozumieć jako

$$\underbrace{a+\dots+a}_{k\text{-razy}}$$

„Parabola" $y = x^2$ (czarne kropki) i odcinek „prostej stycznej" do niej (kropki czerwone) w punkcie (6, 5) na „płaszczyźnie" Z_{31}^2.