Czego nie byłoby w topologii bez aksjomatu ciągłości?

Doc. dr Maria MOSZYŃSKA

Jesteśmy przyzwyczajeni utożsamiać otaczającą nas przestrzeń z trójwymiarową przestrzenią kartezjańską $\mathscr{R}^3$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathscr{R}$, tzn. traktować punkt jako trójkę uporządkowaną liczb rzeczywistych (x_1, x_2, x_3), a odległość dwóch takich punktów (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) mierzyć według wzoru Kartezjusza

$$\varrho((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}.$$

Kwadrat punktu z jest to iloczyn skalarny $z \cdot z$, tzn. jest to suma kwadratów współrzędnych punktu z.
Ogólnie, iloczyn skalarny:
$x \cdot y = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) =$
$= x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

Nasuwa się pytanie, czy musimy mieć do dyspozycji wszystkie liczby rzeczywiste, czy nie możemy „gospodarować oszczędniej"?

Ważne jest, żeby zbiór liczb, którymi się posługujemy, F, zawierał 0 i 1 i żeby było w nim wykonalne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. To znaczy chcemy, by struktura $\mathscr{F} = (F, 0, 1, +, \cdot)$ była ciałem. Czy może to być np. najmniejsze ciało liczbowe zawarte w ciele liczb rzeczywistych, tzn. ciało liczb wymiernych? Widać, że nie moglibyśmy wtedy mierzyć odległości dowolnych dwóch punktów, bo np. odległość punktu $(1, 1, 1)$ od $(0, 0, 0)$ jest liczbą niewymierną. A więc dla celów geometrii metrycznej istotna jest wykonalność pierwiastkowania sumy kwadratów, tj. ciało $\mathscr{F}$ powinno być pitagorejskie. Zażądamy więcej: aby $\mathscr{F}$ było euklidesowe, tzn. aby było w nim wykonalne pierwiastkowanie dowolnej liczby nieujemnej.

To pologia (por. artykuł M. Skwarczyńskiego) w przestrzeni (R^3, ϱ) (jak w każdej przestrzeni metrycznej) wyznaczona jest przez kule otwarte, tj. zbiorami otwartymi są sumy takich kul.

W tytule tego artykułu mowa jest o topologii. Chodzi więc o to, czy zastąpienie ciała $\mathscr{R}$ przez dowolne ciało euklidesowe $\mathscr{F}$ wpłynie na własności topologiczne przestrzeni. Okazuje się, że tak. W twierdzeniach topologicznych istotną rolę odgrywa własność ciała uporządkowanego $(R, \leqslant)$ zwana ciągłością (lub zupełnością) porządku $\leqslant$ (nie mylić z pojęciem ciągłości funkcji!!!). Można ją opisać tak:

Jeżeli zbiór R podzielimy na dwa niepuste rozłączne podzbiory A, B tak, by

$$a \leqslant b \text{ dla każdego } a \in A,\ b \in B,$$

to istnieje liczba $x \in R$, która spełnia nierówność

$$a \leqslant x \leqslant b$$

dla każdego $a \in A$, $b \in B$.

Zdanie to, zwane *aksjomatem ciągłości*, mówi, że w zbiorze R „nie ma luk".

Żeby zdać sobie sprawę z tego, co tracimy w topologii przestrzeni kartezjańskiej zastępując ciało liczb rzeczywistych uporządkowane w sposób ciągły dowolnym ciałem euklidesowym $\mathscr{F}$, przytoczymy dwa twierdzenia o przestrzeni $\mathscr{R}^3$ i zastanowimy się, czy można je uogólnić na $\mathscr{F}^3$.

Ustalmy terminologię i oznaczenia.

Niech $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Niech $K^3_{\mathscr{F}}$ będzie kulą jednostkową w przestrzeni $\mathscr{F}^3$:

$$K^3_{\mathscr{F}} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{F}^3 : \varrho(x, \mathbf{0}) \leqslant 1\};$$

Sferą jednostkową w przestrzeni $\mathscr{F}^3$ będziemy nazywać zbiór

$$S^2_{\mathscr{F}} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{F}^3 : \varrho(x, \mathbf{0}) = 1\}.$$

W szczególności, jeśli $\mathscr{F} = \mathscr{R}$, otrzymujemy zwykłą trójwymiarową kulę i jej brzeg — dwuwymiarową sferę.

Niech $K^3 = K^3_{\mathscr{R}}$ i $S^2 = S^2_{\mathscr{R}}$.

Twierdzenie 1 — o punkcie stałym (L. E. J. Brouwer):
Dla każdej funkcji ciągłej

$$f: K^3 \to K^3$$

istnieje punkt stały, tj. taki punkt $x_0 \in K^3$, dla którego

$$f(x_0) = x_0.$$

Twierdzenie 2 — o tym, że sfera nie jest retraktem kuli (K. Borsuk):
Nie istnieje funkcja ciągła

$$r: K^3 \to S^2$$

spełniająca warunek

$$r(x) = x \quad \text{dla każdego } x \in S^2$$

(tj. nie istnieje *retrakcja kuli K^3 na sferę S^2*).

Żadne z tych dwu twierdzeń nie da się uogólnić na przestrzeń kartezjańską nad dowolnym ciałem euklidesowym $\mathscr{F}$, tzn. nie można w tych twierdzeniach zastąpić K^3 przez $K^3_{\mathscr{F}}$ i S^2 przez $S^2_{\mathscr{F}}$. Żeby tego dowieść, wystarczy wskazać takie ciało euklidesowe $\mathscr{F}$, dla którego zachodzą następujące dwa twierdzenia

Twierdzenie 1*. *Istnieje funkcja ciągła*

$$f: K^3_{\mathscr{F}} \to K^3_{\mathscr{F}}$$

bez punktu stałego, tj. spełniająca warunek

$$f(x) \neq x \quad \text{dla każdego } x \in K^3_{\mathscr{F}}.$$

Twierdzenie 2°. *Sfera $S^2_{\mathscr{F}}$ jest retraktem kuli $K^3_{\mathscr{F}}$, tzn. istnieje funkcja ciągła*

$$r\colon K^3_{\mathscr{F}} \to S^2_{\mathscr{F}}$$

spełniająca warunek

$$r(x) = x \quad dla\ x \in S^2_{\mathscr{F}}.$$

Niech $\mathscr{F}$ będzie ciałem liczb algebraicznych rzeczywistych. Można wykazać, że nie spełnia ono aksjomatu ciągłości. Jest to ciało euklidesowe przeliczalne, a więc zbiór $\mathscr{F}^3$ jest również przeliczalny.

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że zarówno przestrzeń $K^3_{\mathscr{F}}$, jak i przestrzeń F (z metryką kartezjańską) są w sobie gęste, tzn. nie mają punktów izolowanych — każdy punkt jest punktem skupienia.

Punkt x jest punktem skupienia przestrzeni X, jeśli w dowolnej kuli o środku x istnieje punkt $x' \neq x$.

Dwie przestrzenie są homeomorficzne, jeżeli istnieje homeomorfizm jednej z nich na drugą (por. art. M. Skwarczyńskiego).

Otóż wiadomo, że każde dwie przestrzenie przeliczalne w sobie gęste są homeomorficzne, a zatem mamy

Lemat 1. *Przestrzenie $K^3_{\mathscr{F}}$ i F są homeomorficzne.*

Dowód **Twierdzenia 1°**. Na mocy **Lematu** istnieje homeomorfizm

$$h\colon K_{\mathscr{F}} \to F.$$

Niech $g\colon F \to F$ będzie przesunięciem o 1:

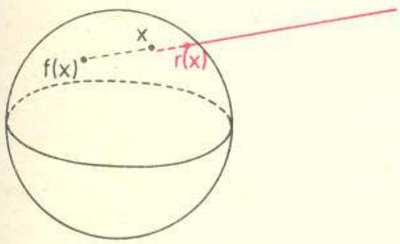
$$g(x) = x+1 \quad \text{dla} \quad x \in F.$$

Weźmy pod uwagę funkcję

$$f = h^{-1}gh\colon K^3_{\mathscr{F}} \to K^3_{\mathscr{F}}.$$

Funkcja f jest ciągła, jako superpozycja (złożenie) funkcji ciągłych. Gdyby jakiś punkt x_0 był punktem stałym funkcji f, to punkt $y_0 = h(x_0)$ byłby punktem stałym funkcji g, bo

$$g(y_0) = gh(x_0) = hf(x_0) = h(x_0) = y_0.$$



Ale funkcja g nie ma punktów stałych. A więc f też nie ma punktów stałych, co kończy dowód.

Dowód **Twierdzenia 2°**. Na mocy **Twierdzenia 1°** istnieje funkcja ciągła

$$f\colon K^3_{\mathscr{F}} \to K^3_{\mathscr{F}}$$

bez punktu stałego. Przy jej pomocy skonstruujemy retrakcję r kuli na sferę,

$$r\colon K^3_{\mathscr{F}} \to S^2_{\mathscr{F}}.$$

Weźmy dowolny punkt $x \in K^3_{\mathscr{F}}$. Ponieważ $f(x) \neq x$, więc punkty x i $f(x)$ wyznaczają półprostą w $\mathscr{F}^3$:

$$L_{\mathscr{F}}(x) = \{x+t(f(x)-x)\colon t \in F \wedge t \leqslant 0\}.$$

(Zauważmy, że półprosta ta nie przechodzi przez $f(x)$.)

Pokażemy, że półprosta $L_{\mathscr{F}}(x)$ przecina sferę $S^2_{\mathscr{F}}$ w jednym punkcie, tzn. w zbiorze F istnieje dokładnie jedna liczba $t \leqslant 0$, dla której

$$x+t(f(x)-x) \in S^2_{\mathscr{F}}. \tag{1}$$

Warunek (1) równoważny jest warunkowi

$$\varrho(\mathbf{0},\ x+t\cdot(f(x)-x)) = 1, \tag{2}$$

który można (przyjmując $y = f(x)$) zapisać w postaci

$$(x+t(y-x))^2 = 1.$$

Stosując prawo rozdzielności iloczynu skalarnego względem dodawania punktów, otrzymujemy stąd równanie kwadratowe względem t:

$$t^2(y-x)^2+2t\cdot x\cdot(y-x)+(x^2-1) = 0.$$

Można obliczyć, że równanie to ma wyróżnik Δ_x dodatni, oraz że z dwóch jego pierwiastków rzeczywistych dokładnie jeden jest niewiększy od 0. Ten pierwiastek ma postać

$$t_x = x\cdot(x-y)-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_x}$$

więc — jak łatwo sprawdzić — wyraża się w zależności od współrzędnych punktów x i $f(x)$ za pomocą działań, które nie wyprowadzają poza zbiór $\mathscr{F}$. Zatem $t_x \in F$.

Wartość funkcji r w punkcie x określamy jako ten jedyny punkt wspólny półprostej $L_{\mathscr{F}}(x)$ i sfery $S^2_{\mathscr{F}}$:

$$r(x) = x+t_x\cdot(f(x)-x).$$

Tak zdefiniowana funkcja

$$r\colon K^3_{\mathscr{F}} \to S^2_{\mathscr{F}}$$

jest ciągła, oraz spełnia warunek

$$r(x) = x \quad \text{dla } x \in S^2_{\mathscr{F}},$$

ponieważ

$$x \in S^2_{\mathscr{F}} \Rightarrow t_x = 0.$$

A więc r jest retrakcją kuli $K^3_{\mathscr{F}}$ na sferę $S^2_{\mathscr{F}}$, co kończy dowód **Twierdzenia 2°**.

Warto wspomnieć, że zarówno Twierdzenia 1 i 2, jak Twierdzenia 1° i 2° przenoszą się na kulę n-wymiarową i sferę $(n-1)$-wymiarową w przestrzeni n-wymiarowej (dla dowolnego $n \geqslant 2$).