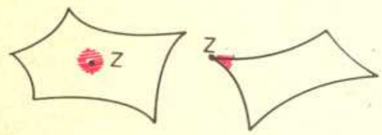
Continuum

Dr Maciej SKWARCZYŃSKI

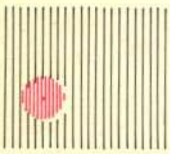
Tytuł tego artykułu jest zapożyczony z łaciny. Słowo *continuum* oznacza twór położony w przestrzeni, rozpościerający się bez przerw, złożony z części złączonych ze sobą w jedną całość. Spróbujemy zastąpić to określenie definicją matematyczną. W tym celu sformalizujemy nasze intuicje związane z pojęciem przestrzeni.

Punktem wyjścia dla naszych rozważań jest analogia geograficzna, w której płaszczyzna mapy odgrywa rolę przestrzeni dwuwymiarowej. Rozważmy dowolną miejscowość Z oraz pewną okolicę tej miejscowości. Obrazem miejscowości Z na mapie jest punkt, który w dalszym ciągu będziemy oznaczać literą z, a obrazem okolicy jest pewna figura płaska zawierająca punkt z. Dwie różne osoby będą miały z reguły odmienne zdania w kwestii, jakie tereny składają się na okolicę miejscowości Z i w związku z tym wskażą na mapie dwie różne figury płaskie. Zawsze jednak wskazana figura będzie zawierać jakieś koło o środku w punkcie z, por. rys. 1a i 1b.

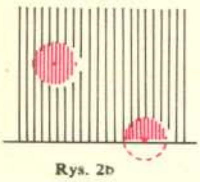


Rys. 1a. To jest Rys. 1b. To nie jest okolica miejscowości Z

Niech teraz $\mathcal{F}$ będzie dowolną figurą płaską, a z dowolnym punktem płaszczyzny. Jeżeli figurę $\mathcal{F}$ można uważać za „okolicę" punktu z, lub mówiąc bardziej precyzyjnie, jeśli figura $\mathcal{F}$ zawiera pewne koło o środku w punkcie z, to punkt z nazywa się *wewnętrznym* punktem tej figury. Figura, która składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych, nazywa się *zbiorem otwartym*. Dla przykładu, półpłaszczyzna rozważana bez ograniczającej linii prostej jest zbiorem otwartym, podczas gdy półpłaszczyzna uzupełniona ograniczającą linią już zbiorem otwartym nie jest, por. rys. 2a i 2b.

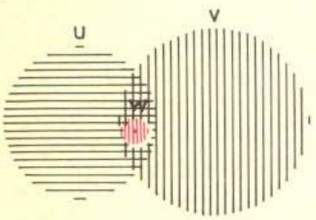


Rys. 2a



Rys. 2b

Przykładem zbioru otwartego jest również koło otwarte, tj. koło rozważane bez ograniczającego okręgu. Zauważmy, że rodzina złożona z wszystkich kół otwartych pokrywa całą płaszczyznę, oraz że dwa koła otwarte zawierające punkt z zawierają wraz z tym punktem pewne koło otwarte, por. rys. 3.



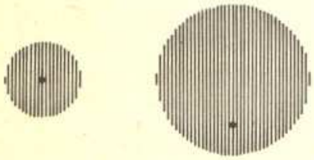
Rys. 3

Jest interesujące, że intuicje odnoszące się do płaszczyzny są przydatne również przy badaniu dowolnego „abstrakcyjnego" zbioru X, pod warunkiem, że w zbiorze X zostały wyróżnione podzbiory zwane *otoczeniami*, a rodzina Θ złożona z wszystkich otoczeń ma własności analogiczne do własności rodziny złożonej z wszystkich kół otwartych na płaszczyźnie. Mówiąc dokładniej, zakładamy, że rodzina Θ ma następujące własności

i. każdy punkt $z \in X$ należy do pewnego otoczenia $U \in \Theta$,

ii. jeżeli punkt $z \in X$ należy do otoczenia $U \in \Theta$, oraz do otoczenia $V \in \Theta$, to istnieje otoczenie $W \in \Theta$ takie, że $z \in W \subset U \cap V$.

Jeżeli punkt z należy do otoczenia U, to mówimy, że U jest *otoczeniem punktu* z. Jeśli zbiór $G \subset X$ wraz z punktem z zawiera pewne otoczenie punktu z, to mówimy, że z jest *wewnętrznym punktem* zbioru G. Zbiór G, który składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych, nazywa się *zbiorem otwartym* w X. Rodzina τ złożona z wszystkich zbiorów otwartych w X nazywa się *topologią* zbioru X, określoną przez rodzinę otoczeń Θ. Zbiór X z ustaloną topologią nazywa się *przestrzenią topologiczną*. Jeżeli każde dwa różne punkty przestrzeni topologicznej X mają rozłączne otoczenia (por. rys. 4), to mówimy, że X jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa.



Rys. 4

Oto kilka najprostszych przykładów przestrzeni Hausdorffa: linia prosta z topologią określoną przez rodzinę otoczeń złożoną z wszystkich odcinków otwartych; płaszczyzna z topologią określoną przez rodzinę otoczeń złożoną z wszystkich kół otwartych; przestrzeń trójwymiarowa z topologią określoną przez rodzinę otoczeń złożoną z wszystkich kul (punkty ograniczającej sfery nie są zaliczane do punktów kuli).

W każdej przestrzeni topologicznej X rodzina złożona z wszystkich zbiorów otwartych ma następujące własności, wynikające natychmiast z własności rodziny otoczeń

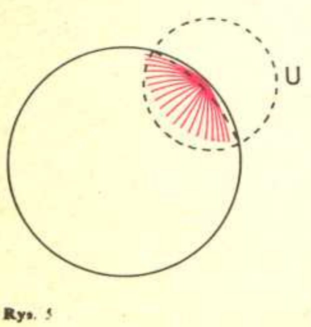
j . zbiór pusty $\emptyset$ i zbiór X są otwarte

jj . część wspólna dwu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym

jjj. suma każdej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Zauważmy, że w każdym podzbiorze E przestrzeni topologicznej X można w naturalny sposób wyróżnić pewną rodzinę otoczeń. W istocie, jeśli Θ jest rodziną otoczeń w przestrzeni X, to rodzina Θ_E złożona z wszystkich zbiorów postaci $U \cap E$, gdzie $U \in \Theta$, ma własności rodziny otoczeń w zbiorze E. Tak więc podzbiór przestrzeni topologicznej sam jest przestrzenią topologiczną. Można wykazać, że każdy zbiór otwarty w E ma postać $G \cap E$, gdzie G jest pewnym zbiorem otwartym w X.

W szczególnym przypadku, gdy X jest przestrzenią trójwymiarową, a S sferą położoną w tej przestrzeni, rodzina otoczeń w przestrzeni X składa się z kul, a rodzina otoczeń na sferze S składa się z czasz sferycznych, por. rys. 5.

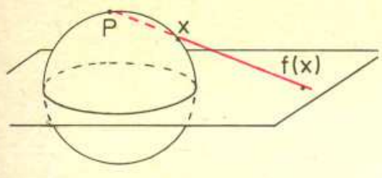


Rys. 5

Przy badaniu przestrzeni topologicznych ważną rolę odgrywają funkcje określone w przestrzeni topologicznej i przyjmujące wartości w przestrzeni topologicznej, lub jak mówimy, odwzorowania przestrzeni topologicznych. Niech X będzie przestrzenią z topologią α i niech Y będzie przestrzenią z topologią β. Mówimy, że odwzorowanie

$$f: X \to Y$$

jest *ciągłe w punkcie* $z \in X$, jeżeli dla każdego otoczenia V punktu $f(z)$ w przestrzeni Y można znaleźć otoczenie U punktu z w przestrzeni X, o tej własności, że każdy punkt $x \in U$ jest odwzorowany na punkt $f(x)$ należący do otoczenia V. Własność tę można również sformułować



Rys. 6

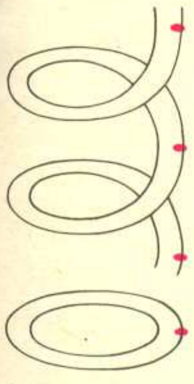
bardziej poglądowo, stwierdzając że punkt $f(x)$ jest bliski punktowi $f(z)$, jeśli tylko punkt x jest bliski punktowi z. Mówimy, że odwzorowanie f jest ciągłe jeżeli jest ciągłe w każdym punkcie $z \in X$. Czytelnik sprawdzi z łatwością, że odwzorowanie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru G otwartego w Y jego przeciwobraz $f^{-1}(G)$ zdefiniowany wzorem

$$f^{-1}(G) = \{x \in X: \quad f(x) \in G\}$$

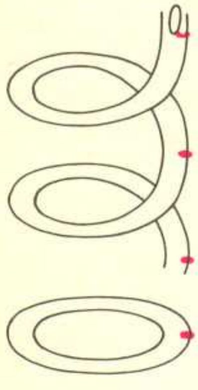
jest zbiorem otwartym w X.

Rozważmy następujący przykład. Niech X będzie sferą S z usuniętym biegunem północnym P i niech Y będzie płaszczyzną równika, por. rys. 6.

Każdemu punktowi $x \in X$ możemy przyporządkować punkt $f(x)$, w którym prosta wyznaczona przez punkty x i P przecina płaszczyznę Y. Nietrudno zauważyć, że f jest odwzorowaniem ciągłym. Można stwierdzić więcej, a mianowicie że f jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem ciągłym, mającym ciągłe odwzorowanie odwrotne. Takie odwzorowania nazywamy *homeomorfizmami*. Jeżeli istnieje homeomorfizm $f: X \to Y$, to mówimy, że *przestrzenie X i Y są homeomorficzne*. W tym przypadku zbiór $f^{-1}(G)$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór G jest otwarty. Wynika stąd, że przestrzenie homeomorficzne mają takie same własności topologiczne.



Rys. 7a

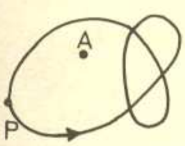


Rys. 7b

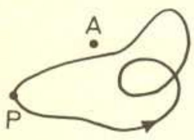
Z kolei rozważmy otwarty pierścień Y położony na płaszczyźnie, oraz powierzchnię X w kształcie obustronnie nieskończonego ślimaka, leżącą nad pierścieniem Y, por. rys. 7a. Każdemu punktowi $x \in X$ przyporządkowujemy jego rzut $f(x)$ na pierścień Y. Zwróćmy uwagę na następującą własność odwzorowania f. Każdy punkt $y \in Y$ ma takie otoczenie V, że przeciwobraz $f^{-1}(V)$ jest sumą parami rozłącznych zbiorów otwartych, przy czym jeśli U jest jakimkolwiek z tych zbiorów, to odwzorowanie

$$f: U \to V$$

jest homeomorfizmem. Odwzorowanie f o powyższej własności nazywa się nakryciem. Każde nakrycie jest przykładem odwzorowania ciągłego. Przykład odwzorowania ciągłego, które nie jest nakryciem, został przedstawiony na rys. 7b.



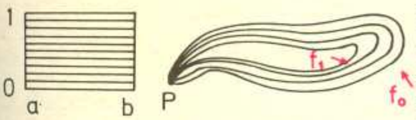
Rys. 8a



Rys. 8b

Odwzorowanie ciągłe $f: \langle a, b\rangle \to X$ odcinka w przestrzeń topologiczną X nazywa się *krzywą* w tej przestrzeni. Jest to nic innego, jak „opis podróży" po przestrzeni X w czasie od a do b. Tak więc, jeśli w okresie czasu od a do b będziemy mazać ołówkiem po kartce papieru, nie odrywając ostrza od kartki, to określimy pewną krzywą płaską. Powstały przy tej okazji rysunek nazywa się *obrazem krzywej*. Rozważmy punkt A nie należący do obrazu zamkniętej krzywej f. Liczba określająca, ile razy krzywa f obiega punkt A, nazywa się *indeksem* punktu A względem krzywej f. Rysunki 8a i 8b przedstawiają obrazy krzywych płaskich, których indeks względem punktu 0 wynosi odpowiednio 1 i 0. (Strzałka odnosi się do krzywej, a nie do obrazu!)

Ciągłe odwzorowanie prostokąta $f: \langle a, b\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to X$ pozwala określić rodzinę krzywych $f_s: \langle a, b\rangle \to X$ danych wzorami $f_s(t) = f(t, s)$. Załóżmy, że wszystkie te krzywe zaczynają i kończą się w tym samym punkcie P, por. rys. 9.



Rys. 9

Możemy uważać, że rodzina f_s opisuje proces, w którym krzywa f_0 pozostając w przestrzeni X zostaje zdeformowana do krzywej f_1. Mówimy, że krzywe f_0 i f_1 są *homotopijne* w przestrzeni X. Aby bliżej omówić to pojęcie, wyróżnimy pewną klasę przestrzeni topologicznych. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *spójna*, jeśli nie istnieją zbiory U i V otwarte w X, niepuste, rozłączne i takie, że $X = U \cup V$. W szczególności zbiór $E \subset X$ jest spójny wtedy, gdy nie istnieją zbiory U i V otwarte w X, dla których

$$U \cap E \neq \emptyset, \quad V \cap E \neq \emptyset, \quad U \cap E \cap V = \emptyset \text{ oraz } E \subset U \cup V.$$

Można łatwo zauważyć, że każdy spójny podzbiór E osi liczbowej musi być przedziałem. Wystarczy w tym celu pokazać, że jeśli $a \in E$, $b \in E$ oraz $a < c < b$, to $c \in E$. Rozumując nie wprost przypuśćmy, że $c \notin E$ i połóżmy $U = (-\infty, c)$, $V = (c, \infty)$. Wówczas $E \subset U \cup V$, $a \in U \cap E$, $b \in V \cap E$ oraz $U \cap V \cap E = \emptyset$, a więc E nie jest zbiorem spójnym. Na odwrót, wykorzystując tzw. aksjomat ciągłości dla zbioru R liczb rzeczywistych można udowodnić, że każdy przedział jest zbiorem spójnym.

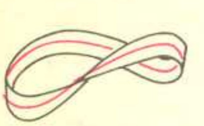
Bezpośrednio z definicji spójności wynika, że przy przekształceniu ciągłym obraz przestrzeni spójnej jest spójny. W szczególności obraz każdej krzywej jest zbiorem spójnym. Innym natychmiastowym wnioskiem z definicji zbioru spójnego jest twierdzenie, że suma dowolnej liczby spójnych zbiorów w X, zawierających wspólny punkt P, jest spójnym zbiorem w X. Suma wszystkich spójnych podzbiorów przestrzeni X, do których należy punkt P (tj. największy zbiór spójny, do którego należy ten punkt), nazywa się *składową* tej przestrzeni wyznaczoną przez punkt P. Czytelnik zechce przekonać się, że zbiór otwarty na płaszczyźnie jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa punkty P, Q można połączyć krzywą w tym zbiorze, oraz że każda składowa otwartego zbioru na płaszczyźnie jest zbiorem otwartym. Każda przestrzeń topologiczna jest sumą swoich parami rozłącznych składowych.

Jeżeli f_0 i f_1 są krzywymi homotopijnymi w płaszczyźnie bez punktu A, to indeks krzywej f_s względem A jest ciągłą funkcją zmiennej s w przedziale $\langle 0, 1\rangle$ i wobec tego zbiór wszystkich wartości tej funkcji jest przedziałem. Z drugiej strony indeks przyjmuje tylko wartości całkowite, a więc rozważany zbiór wartości musi składać się tylko z jednego punktu. Wynika stąd, że krzywe przedstawione na rys. 8a i 8b nie są homotopijne w płaszczyźnie z usuniętym punktem 0.

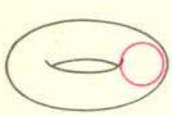
Rozważmy teraz dowolny zbiór otwarty i spójny Y na płaszczyźnie (czyli obszar). Jeżeli każda zamknięta krzywa w Y o początku w punkcie P jest homotopijna w Y z krzywą stałą (jest ściągalna do punktu P), to mówimy, że Y jest obszarem jednospójnym. Prawdziwe (i ważne) jest następujące *twierdzenie o monodromii*, charakteryzujące obszary jednospójne:
Na to, aby obszar Y był jednospójny, potrzeba i wystarcza, aby każde nakrycie odwzorowujące dowolną przestrzeń spójną X na Y było odwzorowaniem różnowartościowym.
Inną ważną klasę przestrzeni topologicznych tworzą *przestrzenie zwarte*. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *zwarta*, jeśli dla każdej rodziny $\mathcal{U}$ złożonej z otwartych zbiorów w X i takiej, że suma wszystkich zbiorów tej rodziny równa jest X, istnieje skończona liczba takich zbiorów $U_i \in \mathcal{U} (i = 1, 2, \ldots, k)$, że $X \subset U_1 \cup U_2 \ldots \cup U_k$. Podzbiór E dowolnej przestrzeni topologicznej X jest zwarty, jeśli dla każdej rodziny $\mathcal{U}$ złożonej z otwartych zbiorów w X, takiej że E zawiera się w sumie zbiorów tej rodziny istnieje skończona liczba takich zbiorów $U_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, że $E \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k$.
Mówimy, że E jest *domkniętym* podzbiorem przestrzeni topologicznej X, jeżeli zbiór $X \setminus E$ jest otwarty. Udowodnimy, że jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa, to każdy jej podzbiór zwarty X jest domknięty. Rozważmy dowolny punkt $z \in X \setminus E$. Dla każdego $x \in E$ można na mocy założenia znaleźć rozłączne otoczenia U_x i V_z, takie że $x \in U_x$, oraz $z \in V_z$. Zbiór E jest zwarty i jest pokryty przez rodzinę $\mathcal{U} = \{U_x, x \in E\}$. Istnieje więc skończona liczba takich otoczeń U_{x_i}, $x_i \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, że $E \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Niech V będzie otoczeniem punktu z zawartym w zbiorze otwartym $V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \ldots \cap V_{x_k}$. Oczywiście $z \in V \subset X \setminus E$, a więc z jest wewnętrznym punktem zbioru $X \setminus E$, co kończy dowód.
Zauważmy, że oś liczbowa R nie jest zbiorem zwartym, gdyż można ją pokryć nieskończoną rodziną otwartych przedziałów $(j, j+2)$ (j całkowite), podczas gdy żadna skończona ilość tych przedziałów nie pokrywa R. To samo rozumowanie pokazuje, że każdy zwarty zbiór na prostej jest zbiorem ograniczonym. Można udowodnić (ale nie będziemy tego robić), że podzbiór linii prostej jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. To samo twierdzenie pozostaje prawdziwe dla podzbiorów płaszczyzny, a także dla podzbiorów przestrzeni trójwymiarowej.
Powróćmy teraz do zagadnienia postawionego na wstępie i zastanówmy się, jakie podzbiory zasługują na nazwę *continuum*. Niewątpliwie na nazwę tę zasługuje odcinek domknięty na prostej, por. rys. 10.

Rys. 10

Jak widzieliśmy, podzbiór prostej jest odcinkiem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem zwartym i spójnym. Będziemy więc w zgodzie z intuicją, jeśli te własności topologiczne przyjmiemy za podstawę naszej definicji. Tak więc przez *continuum* będziemy rozumieć dowolną przestrzeń topologiczną zwartą i spójną. Aby ocenić przydatność tej definicji, zapoznamy się z przykładami continuów położonych na sferze.
Zauważmy przede wszystkim, że sfera S jest zwartą przestrzenią Hausdorffa. Rzeczywiście, południowa hemisfera wraz z równikiem jest zwarta, gdyż jest homeomorficzna z kołem domkniętym na płaszczyźnie (por. rys. 6). Ponieważ suma dwu zwartych podzbiorów przestrzeni jest, jak łatwo sprawdzić, zbiorem zwartym, więc sfera jest zwarta jako suma dwu hemisfer.
Czytelnik sprawdzi z łatwością, że każdy domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zbiorem zwartym. Wynika stąd, że podzbiór $K \subset S$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty, oraz że podzbiór $K \subset S$ jest continuum wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i spójny.
Załóżmy, że $K \subset S$ jest zbiorem domkniętym. Można udowodnić (ale dowód jest bardzo trudny), że zbiór K jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każda składowa otwartego zbioru $S \setminus K$ jest homeomorficzna z obszarem jednospójnym. W szczególnym przypadku, gdy K jest krzywą Jordana (tj. homeomorficznym obrazem okręgu), ma miejsce twierdzenie Jordana, które mówi, że zbiór $S \setminus K$ ma dokładnie dwie składowe.



Rys. 11a



Rys. 11b

Powyższe twierdzenia należą do dziedziny matematyki zwanej topologią płaszczyzny (a właściwie sfery). Tematyka ta była bardzo bliska twórcom polskiej szkoły matematycznej. Czytelnik bliżej zainteresowany przedstawionymi tu zagadnieniami powinien sięgnąć po oryginalne prace Zygmunta Janiszewskiego (1888—1920) i jego współpracowników.
Na zakończenie dodajmy, że na powierzchniach innych niż sfera własności continuów są zgoła odmienne. I tak na przykład krzywa Jordana na ogół nie rozcina wstęgi Möbiusa (rys. 11a) ani torusa (rys. 11b). Co więcej, dopełnienie krzywej Jordana na rys. 11b jest homeomorficzne z pierścieniem na płaszczyźnie, a obszar ten nie jest jednospójny.