Analiza, Dedekind i Cantor
Sztuka w trzech aktach z prologiem i epilogiem

Doc. dr Piotr MANKIEWICZ

Prolog. Rzecz dotyczy pytania: na ile Dedekind jest potrzebny Analizie? Akt I. Zawiązanie akcji, czyli co to jest Analiza i co ma z tym wspólnego Dedekind; pojawienie się Cantora.

Ciało $\mathscr{R}$ liczb rzeczywistych, które poznajemy (a raczej powinniśmy poznać) w szkole średniej jest opisane pewnym układem aksjomatów. Aksjomaty te można podzielić na dwie klasy; pierwszą klasę stanowią wszystkie aksjomaty z wyjątkiem jednego — tzw. *Aksjomatu Dedekinda*. Aksjomaty pierwszej klasy mają charakter arytmetyczno-porządkowy. Mówią one m.in., że działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych są łączne, przemienne, że odejmowanie jest wykonalne zawsze, a dzielenie — tylko przez liczby różne od 0; że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania; że dodawanie i mnożenie przez liczby dodatnie zachowują porządek (tzn. nierówności) itd. Cechą wspólną tych aksjomatów jest to, że mówią one o własnościach liczb rzeczywistych. Zupełnie inny charakter ma Aksjomat Dedekinda. Opisuje on pewną własność podzbiorów liczb rzeczywistych.

Mianowicie:

Aksjomat Dedekinda. *Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.* (Definicja kresu górnego znajduje się na marginesie.)

Definicja kresu górnego zbioru: Kresem górnym zbioru A nazywamy najmniejszą liczbę rzeczywistą x taką, że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leqslant x$. Kres górny zbioru A (o ile istnieje) oznaczamy zwykle przez $\sup A$.

Nieco trudniej jest powiedzieć, co to jest Analiza. Najlepsze określenie, jakie potrafię wymyślić, jest następujące: Analiza jest to zbiór twierdzeń, dających się wyprowadzić z aksjomatów ciała liczb rzeczywistych, opisujących pewne własności funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na podzbiorach liczb rzeczywistych.

Najłatwiej wyjaśnić, o jakie własności tutaj chodzi, na przykładzie dwóch podstawowych twierdzeń Analizy.

Twierdzenie 1 (Darboux). *Jeżeli funkcja ciągła $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathscr{R}$ przyjmuje na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$ wartości różnych znaków, to wewnątrz przedziału istnieje taka liczba c, że $f(c) = 0$.*

Twierdzenie 2 (Lagrange). *Jeżeli funkcja ciągła $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathscr{R}$ jest różniczkowalna wewnątrz przedziału $\langle a, b\rangle$, to wewnątrz tego przedziału istnieje punkt c taki, że $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Zanotujmy jeszcze jedno twierdzenie Analizy.

Twierdzenie 3 (Cantor). *Ciało liczb rzeczywistych nie jest przeliczalne.* (Definicja zbioru przeliczalnego znajduje się na marginesie.)

Definicja zbioru przeliczalnego: Zbiór nieskończony A nazywa się przeliczalnym, jeżeli istnieje funkcja przekształcająca zbiór liczb naturalnych na ten zbiór.

Akt II. Czy wszystkie liczby rzeczywiste są rzeczywiście potrzebne, czyli tragiczny koniec Analizy.

Żeby zobaczyć, co się stanie z Analizą, kiedy zabraknie Aksjomatu Dedekinda, weźmy dowolne mniejsze podciało $\mathscr{P}$ ciała liczb rzeczywistych, tzn. taki zbiór liczb, w którym spełnione są wszystkie aksjomaty należące do pierwszej klasy. Ponieważ $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$, to istnieje $x_0 \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{P}$. Niech a i b będą takimi liczbami rzeczywistymi należącymi do $\mathscr{P}$, że $a < x_0 < b$ (takie liczby muszą istnieć!). Niech $A = \{x \in \mathscr{P} : a < x < x_0\}$. A jest zbiorem ograniczonym. W ciele $\mathscr{P}$ nie jest spełniony Aksjomat Dedekinda, gdyż z tego, że $\sup A = x_0$ i $x_0 \notin \mathscr{P}$ wynika, że w ciele $\mathscr{P}$ zbiór A nie ma kresu górnego. Gdyby Twierdzenia Analizy nie zależały od Aksjomatu Dedekinda, tzn. dawały się wyprowadzić z aksjomatów należących do pierwszej klasy, to ponieważ $\mathscr{P}$ spełnia wszystkie aksjomaty należące do pierwszej klasy, byłyby one prawdziwe dla funkcji określonych na podzbiorach $\mathscr{P}$ o wartościach w $\mathscr{P}$. Tak jednak nie jest. Np. określmy funkcję $f\colon \langle a, b\rangle_{\mathscr{P}} \to \mathscr{P}$, gdzie $\langle a, b\rangle_{\mathscr{P}}$ oznacza odcinek domknięty w $\mathscr{P}$, tzn. $\langle a, b\rangle_{\mathscr{P}} = \{x \in \mathscr{P} : a \leqslant x \leqslant b\}$, wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dla } a \leqslant x < x_0, \\ 1 \text{ dla } x_0 < x \leqslant b. \end{cases}$$

Łatwo można zauważyć, że spełnia ona założenia twierdzeń 1 i 2, natomiast tezy tych twierdzeń nie zachodzą. Z definicji f wynika, że $f(c) \neq 0$ dla każdego $c \in \langle a, b\rangle_{\mathscr{P}}$, także teza twierdzenia 2 nie może zachodzić, gdyż $f'(c) = 0$ dla każdego $c \in (a, b)$ i $f(b) - f(a) = 2$.

Ponieważ cała nasza konstrukcja wynikła z faktu, że istnieje $x_0 \notin \mathscr{P}$, z rozważań powyższych można wyciągnąć

Wniosek 1. *Każda liczba rzeczywista jest rzeczywiście potrzebna Analizie.*

Takie podciało tworzą np. liczby wymierne.

Z drugiej strony można pokazać, że rezygnacja z Aksjomatu Dedekinda spowoduje nie tylko „zawalenie się" twierdzeń: 1 i 2. Rezygnacja taka spowoduje tragiczny koniec Analizy — zawali się w niej praktycznie wszystko. Zostaną tylko nieciekawe ruiny.

Akt III. Cudowne ocalenie Analizy, czyli liczby i funkcje definiowalne.

Całe nieszczęście wyniknęło z tego, że chcieliśmy z jednej strony zmniejszyć zbiór liczb w Analizie, a z drugiej strony — pozostawić zbiór funkcji praktycznie bez zmian. Zawalenia się Analizy można uniknąć, jeżeli odpowiedniemu zmniejszeniu zbioru liczb towarzyszy odpowiednie zmniejszenie zbioru funkcji. Oto jeden z takich sposobów. Niech $\mathscr{D}$ będzie podzbiorem liczb rzeczywistych, złożonym z liczb definiowalnych za pomocą działań arytmetycznych, liczb naturalnych, zbioru liczb naturalnych, indukcji i kresu górnego (tzn. z liczb, które można „konkretnie" zdefiniować za pomocą tych pojęć).

Każda taka definicja jest zdaniem zbudowanym ze skończonej ilości znaczków, a do dyspozycji mamy w ogóle skończoną ich ilość. Ciągów skończonych o wyrazach ze skończonego zbioru — a zatem i konkretnych definicji jest przeliczalna ilość.

Łatwo można pokazać, że $\mathscr{D}$ jest podciałem ciała liczb rzeczywistych. Np. żeby pokazać, że jeżeli $x \in \mathscr{D}$, to $z = \dfrac{1}{x} \in \mathscr{D}$; wystarczy zauważyć, że liczbę z można zdefiniować następująco:

„z jest jedyną liczbą taką, że $z \cdot x = 1$, gdzie x jest zdefiniowane przez …"

Ponieważ zbiór wszystkich „konkretnych" definicji jest przeliczalny, zatem ciało $\mathscr{D}$ jest przeliczalne; a więc $\mathscr{D}$ jest istotnie mniejsze niż ciało liczb rzeczywistych (por. twierdzenie 3).

Umówmy się, że przez podzbiór ciała $\mathscr{D}$ będziemy rozumieli podzbiór $\mathscr{D}$ definiowalny za pomocą pojęcia „liczby definiowalne" i pojęć wymienionych wyżej. Można udowodnić, że dla ciała $\mathscr{D}$ i jego podzbiorów (definiowalnych) spełniony jest Aksjomat Dedekinda, tj. każdy ograniczony podzbiór definiowalny w $\mathscr{D}$ ma kres górny należący do $\mathscr{D}$.

Wniosek 2. *Ciało D spełnia wszystkie aksjomaty ciała liczb rzeczywistych* (przy interpretacji: podzbiór = podzbiór definiowalny).

Rozważmy wszystkie funkcje definiowalne z $\mathscr{R}$ w $\mathscr{R}$.

Twierdzenie 4. *Każda funkcja definiowalna przeprowadza liczby definiowalne w liczby definiowalne.*

Dowód: Jeżeli x jest liczbą definiowalną, a f jest funkcją definiowalną, to definicja $z = f(x)$ wygląda następująco:

„z jest jedyną liczbą rzeczywistą taką, że $z = f(x)$, gdzie f jest zdefiniowane przez …, a x jest zdefiniowane przez …".

Zatem jeżeli ograniczymy się do liczb, podzbiorów i funkcji definiowalnych, to w otrzymanym modelu spełnione będą wszystkie aksjomaty ciała liczb rzeczywistych, a więc prawdziwe będą wszystkie twierdzenia Analizy (bo można je z tych aksjomatów wyprowadzić).

Nazwijmy sobie tę teorię Analizą Definiowalną.

Wniosek 3. *Mimo zmniejszenia ciała liczb rzeczywistych Analizę udało się jednak uratować.*

Wniosek 4. *W obrębie Analizy Definiowalnej wszystkie twierdzenia Analizy są prawdziwe przy następującej interpretacji:*

liczby rzeczywiste	— liczby rzeczywiste definiowalne
podzbiory liczb rzeczywistych	— definiowalne podzbiory liczb definiowalnych
funkcje	— funkcje definiowalne
itd…	

Zbiór funkcji w Analizie Definiowalnej jest wystarczająco obszerny. Funkcji tych wystarczy inżynierom, by mogli budować domy, mosty a nawet pojazdy kosmiczne. Wystarczy ich także matematykom. Tak naprawdę to funkcji tych wystarczy wszystkim. Nikt z nas nie ma żadnej szansy spotkać się z funkcją niedefiniowalną w praktyce. Dlaczego?

W szczególności, w obrębie Analizy Definiowalnej prawdziwe jest twierdzenie 3 (porównaj Definicję zbioru przeliczalnego). To znaczy, że zachodzi

Twierdzenie 5 (Cantora dla Analizy Definiowalnej). *Ciało $\mathscr{D}$ nie jest przeliczalne.*

Epilog. Zaskakujące konsekwencje, czyli jak przeliczalność zbioru (i nie tylko ona) może zależeć od naszego obrazu świata.

Na początku aktu III stwierdziliśmy, że ciało $\mathscr{D}$ jest przeliczalne, na końcu zaś tego samego aktu podaliśmy twierdzenie Cantora mówiące, że ciało $\mathscr{D}$ nie jest przeliczalne. Sprzeczność! Chcieliśmy ocalić Analizę, a w efekcie utopiliśmy Matematykę. Sprawa domaga się wyjaśnienia! Wyjaśnienie takie jest stosunkowo proste. To, czy pewien zbiór A jest przeliczalny, czy nie, nie jest własnością absolutną tego zbioru. Może to w pewnych wypadkach zależeć od przyjętego obrazu (modelu) „świata". Mianowicie, w naszym przykładzie

1° — w przypadku Analizy model zawierał dużo elementów i dużo funkcji — a więc nic dziwnego, że wśród nich znalazła się funkcja f odwzorująca zbiór liczb naturalnych na zbiór $\mathscr{D}$ — co spowodowało, że zbiór $\mathscr{D}$ z punktu widzenia Analizy jest przeliczalny (porównaj Definicję zbioru przeliczalnego),

2° — w przypadku Analizy Definiowalnej — model zawierał mniej elementów i mniej funkcji. Twierdzenie Cantora dla Analizy Definiowalnej orzeka, że tych funkcji jest tak mało, że nie znajduje się wśród nich żadna funkcja odwzorowująca liczby naturalne na $\mathscr{D}$.

Ponieważ dodawanie jest „efektywnie" wykonalne, więc w każdym modelu Analizy 2+2 musi się równać 4. Natomiast przeliczalność zbioru nie jest efektywnie sprawdzalna. To znaczy — nie istnieje skończony algorytm pozwalający rozstrzygnąć, czy dany zbiór jest przeliczalny, czy nie. Zdarza się, że w przypadku takich nieefektywnych pojęć odpowiedź na pytanie zależy od przyjętego modelu świata. I tak właśnie jest z przeliczalnością zbioru $\mathscr{D}$.

Podobnym nieefektywnym postulatem jest używany w Geometrii Aksjomat Archimedesa:

Odkładając wielokrotnie na prostej dany odcinek a możemy uzyskać odcinek większy od danego odcinka b.

I w tym wypadku odpowiedź na pytanie, czy tak jest naprawdę, zależy od przyjętego modelu Geometrii.