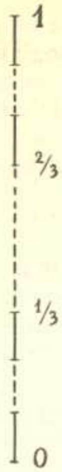
Odwzorowania Peany, czyli o rozcinaniu a potem sklejaniu kwadratów i trójkątów

Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI



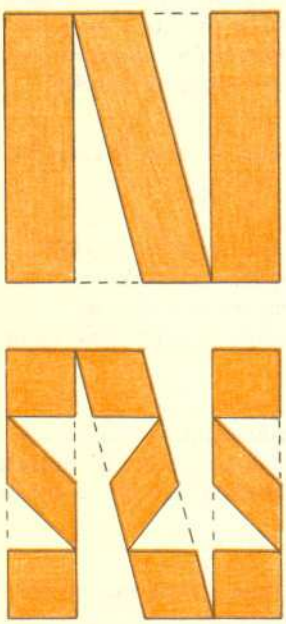
Rys. 1

Jeśli z odcinka (z końcami) usunąć ze środka przedział (bez końców) tak, że zostają dwa odcinki, a potem z tych odcinków tak samo usunąć ze środka po przedziale, to postępując tak dalej otrzymamy jako pozostałość zbiór Cantora, który leżąc na prostej, będąc jej podzbiorem domkniętym i mając tyleż punktów co prosta, nie zawiera już żadnego przedziału.

*

Jeśli odcinek ma długość 1 i usuwamy stale z każdego pozostawionego odcinka przedział o długości 1/3 tego odcinka, to usuniemy zbiór o długości $(1/3)\cdot(1+ +2/3+(2/3)^2+\ldots) = 1$. Pozostałość, tj. zbiór Cantora, ma wtedy długość — a dokładniej miarę 0. Można wszakże zrobić tak, aby ta pozostałość miała długość dodatnią, usuwając (zawsze ze środka) przedziały o długości mniejszej.

*



Rys. 2

Pomyślmy postępowanie przywracające pierwotny stan rzeczy: końce każdego z usuniętych przedziałów sklejamy ze sobą i powstaje znów odcinek.
Zobaczmy całą rzecz jeszcze raz inaczej.
Odcinek tniemy na pół i wtedy rozpada się on na dwa odcinki (skądś przybył jeden koniec). Potem każdy z tych odcinków tniemy znów na pół, i postępując tak dalej dostajemy zbiór Cantora, z którego sklejając na powrót po dwa punkty w dokonanych rozcięciach dostajemy znów odcinek.
Opisaliśmy w skrócie rzecz znaną od czasów Cantora i uważaną zawsze za paradoksalną, że ze zbioru Cantora, jak widać dość szczupłego, można dostać cały odcinek przez odwzorowanie ciągłe, nie sklejające więcej niż po dwa punkty.

*

Odstępstwa od ścisłości matematycznej są tu mimo pozorów (cięcie, sklejanie etc.) niewielkie. Największe są w drugim opisie, kiedy twierdzimy, że w wyniku połowienia odcinków powstaje zbiór Cantora, ten sam co w pierwszym opisie. Uściślenie jest możliwe, ale nie będziemy go robić, bo ten drugi opis był dany jedynie dla poglądowości. Zresztą, wywód matematyczny, jeśli jest absolutnie ścisły, trwa nieskończenie długo: herezja, ale te nie powstają bez dogmatów.

*

To o czym była mowa, ma być wprawką do tego, co będzie robione dalej już o jeden wymiar wyżej.

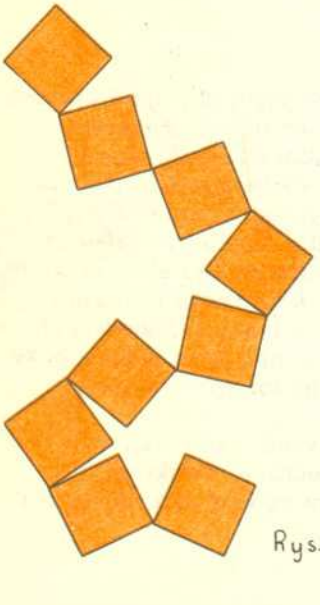
*

W kwadracie płaskim robimy dwa wcięcia, z góry i z dołu, tak aby powstała figura w kształcie litery N jak na rys. 2 u góry. Brzegi wcięć zaliczamy do figury, więc figura się nie rozpada: jest spójna, jak się mówi. Ponacinajmy w podobny sposób powstałe trzy paski, robiąc tym razem jednak nie wcięcia pionowe, lecz poziome. Powstała figura jest spójna i jest rezultatem pierwszego kroku konstrukcji, którą przeprowadzamy; patrz rys. 2 u dołu. Tę figurę można też sobie wyobrazić jako łańcuch równoległoboków stykających się wierzchołkami, które w jednym równoległoboku leżą naprzeciw siebie. Równoległoboków jest 9, a średnica każdego z nich jest (patrzmy na kwadrat w środku o boku równym połowie boku wyjściowego kwadratu i zawierający piąty z kolei równoległobok) mniejsza niż połowa średnicy wyjściowego kwadratu. A oto inna, bardziej schematyczna, ilustracja powstałej figury: jako girlandy prostokątów.

Średnicą zbioru nazywa się kres górny odległości między parami punktów tego zbioru:

$$d(A) = \max_{x,y\in A} \varrho(x,y).$$

Średnicą równoległoboku jest więc długość większej jego przekątnej.



Rys. 3

W drugim kroku robimy kolejno z równoległobokami, począwszy np. od lewego dolnego, to, co robiliśmy w pierwszym kroku z całym kwadratem. Powstaje łańcuch 81 równoległoboków o średnicach mniejszych niż 1/4 średnicy wyjściowego kwadratu, ułożonych w girlandę w ten sposób co poprzednio.
Postępując tak dalej, dostajemy jako pozostałość figurę będącą obrazem ciągłym i wzajemnie jednoznacznym odcinka prostej. Takie figury nazywane są łukami.

*

Przy tej dokładności, z jaką rozpatruje figury geometryczne topologia, łuk nie jest niczym innym niż odcinkiem: z punktu widzenia topologii figury geometryczne uważa się za takie same, jeśli jedną można odwzorować na drugą w sposób ciągły i wzajemnie jednoznaczny (dodaje się też przy tym, że odwzorowanie odwrotne ma być też ciągłe; ale tu nie wyjdziemy poza zakres figur, które są domkniętymi i ograniczonymi podzbiorami płaszczyzny, i to wymaganie będzie zawsze spełnione).

*

Do dowodu, że pozostałość po wycięciach jest łukiem, damy jedynie wskazówkę jak zbudować odwzorowanie f, ciągłe i wzajemnie jednoznaczne, z odcinka prostej $0 \leqslant t \leqslant 1$, na tę pozostałość. Jeśli t jest punktem odcinka, to leży on w jednym z dziewięciu równych odcinków, $I_1, \ldots, I_9$, na które dzielimy całość. Jeśli t leży w I_k, to wartość odwzorowania f w punkcie t leży w P_k, k-tym z kolei równoległoboku spośród dziewięciu otrzymanych w pierwszym kroku konstrukcji (patrz rys. 4). Określiliśmy w ten sposób wartość f w punkcie t z dokładnością do położenia w równoległoboku P_k; określenie to jest wszakże dokładne, jeśli t jest wspólnym końcem odcinków podziału, np. jeśli $t = k/9$; wartość f w punkcie $k/9$ jest wspólnym wierzchołkiem równoległoboków P_k i P_{k+1}.

Wartość odwzorowania f w punkcie t można określić z dokładnością do położenia w równoległobokach z drugiego kroku konstrukcji (mają one średnice co najmniej dwa razy mniejsze niż w pierwszym kroku), jeśli położenie punktu t ustalimy z dokładnością do położenia w jednym z 81 równych odcinków, na które dzielimy cały odcinek. Postępując tak dalej, wartość f w punkcie t możemy określić dokładnie.

Wzajemna jednoznaczność odwzorowania f jest widoczna. Dość widoczna jest też ciągłość, której dowód pomijamy.

*

Policzmy sumę pól wyciętych figur. Równa jest ona $(1/4) \cdot (1+3/4+(3/4)^2+\ldots) = 1$. Pozostały po nich łuk ma więc pole 0. Można wszakże wycinać węższe trójkąty. Argumentacja za ciągłością i wzajemną jednoznacznością odwzorowania, określonego tak jak poprzednio, pozostaje w mocy. Dostajemy wtedy łuk o polu dodatnim.

*

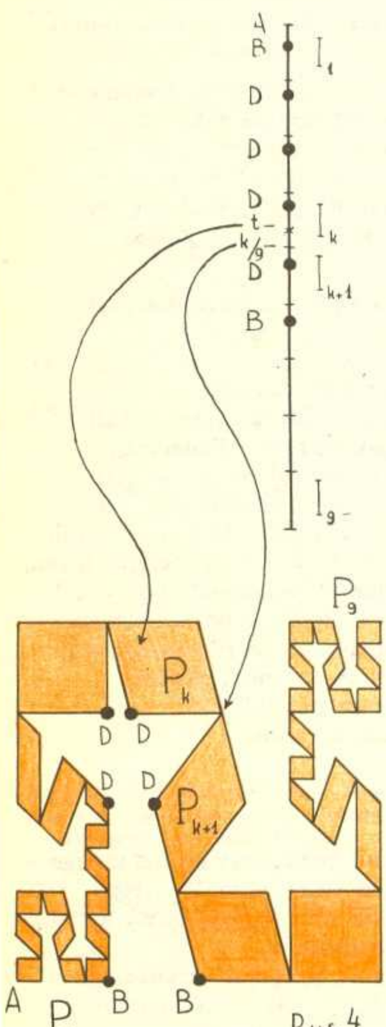
Pomyślmy postępowanie przywracające stan rzeczy: poprzednio zrobione wycięcia sklejamy i dostajemy znowu kwadrat. Jeśli pominąć niedopowiedzenia, opisaliśmy jak z odcinka przez odwzorowanie ciągłe dostaje się kwadrat, tak jak to zrobił w r. 1890 Peano.

*

Na rzeczy można patrzeć różnie. Patrząc na odwzorowanie Peany można by poprzestać na uwadze, że widocznie ciągłość to własność zbyt słaba, by chronić przed patologiami (nazbyt często używa się tego słowa o ujemnym zabarwieniu), i że trzeba się zająć odwzorowaniami bardziej regularnymi. Skoro jednak piszemy o odwzorowaniu Peany, to znaczy, że uważamy je za rzecz co najmniej zastanawiającą.

Bo popatrzmy np. na taki szczegół.

*

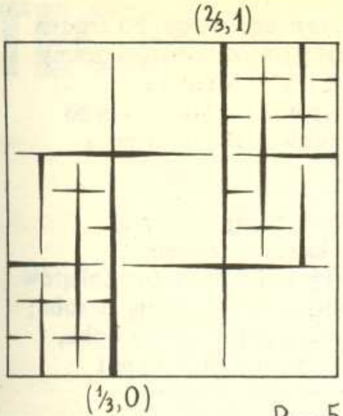


Rys. 4

Sklejając na powrót porozcinany kwadrat nie sklejamy nigdy więcej niż czterech punktów. Dla przykładu, czwórkę punktów sklejających się w jeden punkt kwadratu stanowią punkty zaznaczone na rys. 4 literami D; zaznaczone są i na odcinku i na kwadracie (wierzchołki równoległoboków pierwszego kroku konstrukcji, ale nie te, którymi równoległoboki się stykają). Literami B zaznaczone są punkty jednej z par punktów sklejających się w jeden. Ogólnie, na śladach rozcięć są jedynie takie punkty, które sklejają się ze sobą po dwa albo po cztery. Są punkty nie sklejające się z innymi: są nimi punkty leżące poza wszelkimi rozcięciami, wśród nich np. takie jak punkt zaznaczony literą A. Stanowią one większość. Nie uzasadniając tego całkowicie, zobaczmy np., że na dolnym boku kwadratu tylko przeliczalna ilość punktów łuku leży na rozcięciach; reszta, nieprzeliczalna, to punkty nie sklejające się z innymi.

Mówiąc językiem bardziej profesjonalnym: odwzorowanie ciągłe łuku na kwadrat, które opisaliśmy, ma jedynie wartości czterokrotne, dwukrotne i jednokrotne; te ostatnie stanowią większość; nie różni się więc ono tak bardzo od odwzorowania wzajemnie jednoznacznego.

*

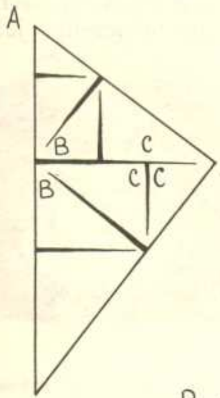


Rys. 5

Zobaczmy całą rzecz jeszcze raz inaczej.
Wspomnieliśmy, że wycięcia można robić cieńsze. Dojdźmy w tym do skrajności i, zamiast wycinać nawet wąskie trójkąty, przecinajmy kwadrat najpierw wzdłuż linii pionowej od punktu (1/3, 0) w górę, nie dochodząc wszakże do samego górnego boku tak, że kwadrat nie rozpada się, a potem wzdłuż linii pionowej od punktu (2/3, 1) w dół, nie dochodząc wszakże do samego dołu; na rys. 5 linie zwężają się w miarę cięcia. Potem nacinamy z kierunków na przemian powstałe przedtem pionowe pasy. Powtarzamy w ten sposób drugi krok konstrukcji i dalsze.
Sposób sklejania jest teraz widoczniejszy i wyraźnie widać punkty czterokrotne i dwukrotne. Pominęliśmy wiele milczeniem w tym nieformalnym opisie; zaczęło się od tego, że nie wyjaśnialiśmy skąd się biorą dodatkowe punkty na dwu brzegach każdego z rozcięć. Formalizacja matematyczna tego sposobu widzenia łuku powstałego z kwadratu przez przecinanie tego kwadratu jest możliwa, ale nie będziemy jej przeprowadzać, bo ten rodzaj opisu będzie nam potrzebny jedynie dla uzyskania lepszej poglądowości.

*

Po konstrukcji Peany przyszły następne. Rysunek 6 przedstawia konstrukcję Pólyi (1913) wykonaną na trójkącie zamiast na kwadracie, co nie ma znaczenia z punktu widzenia topologii. W trójkącie prostokątnym robimy rozcięcie wzdłuż wysokości od spodka ku wierzchołkowi, jednak tak, aby trójkąt się nie rozpadł. To samo robimy w dwu powstałych na skutek poprzedniego nacinania trójkątach prostokątnych, a potem w czterech powstałych teraz. Następny rysunek pokazuje girlandę trójkątów powstałą po trzecim kroku konstrukcji.
Postępując tak dalej dostajemy łuk.



Rys. 6

Idąc na powrót, sklejając dokonane rozcięcia, nie sklejamy nigdy więcej niż po trzy punkty, chyba że ... w pewnym kroku konstrukcji pewne dwie wysokości będą miały ten sam spodek i skleją się z sobą wtedy cztery punkty.
Zdarzać się to może począwszy od trzeciego kroku konstrukcji. Na trzecim kroku konstrukcji możliwe jest to jedynie dla trójkąta równoramiennego.
Oto idea dowodu, że są trójkąty, dla których w konstrukcji Pólyi nie pojawią się wysokości o tych samych spodkach.
Trójkąty, które rozważamy, są w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej z kątami x, $0 < x \leqslant \pi/4$, mniejszymi z ich kątów ostrych. Położenie spodka wysokości na przeciwprostokątnej (wszystkie trójkąty powstające w konstrukcji są podobne) zależy w sposób ciągły od kąta x, co jest niemal widoczne. Jeśli dla danego trójkąta o mniejszym z kątów ostrych równym x na ustalonym kroku konstrukcji spodki pewnych wysokości się pokryją, to zmieniając kąt doprowadzimy do tego, że te spodki się rozejdą. Jeśli nie zmienimy kąta za dużo, to te spodki nie zejdą się z żadnymi innymi i żadne inne nie zejdą się ze sobą. Zatem kąty x, dla których na ustalonym kroku konstrukcji spodki pewnych wysokości się pokrywają, są izolowane. Stąd, dla ustalonego kroku konstrukcji, tych kątów jest przeliczalnie wiele. Zatem i w ogóle jest ich przeliczalnie wiele. Dla pozostałych kątów, a jest ich nieprzeliczalnie wiele, konstrukcja Pólyi prowadzi do sklejania co najwyżej trójek punktów.

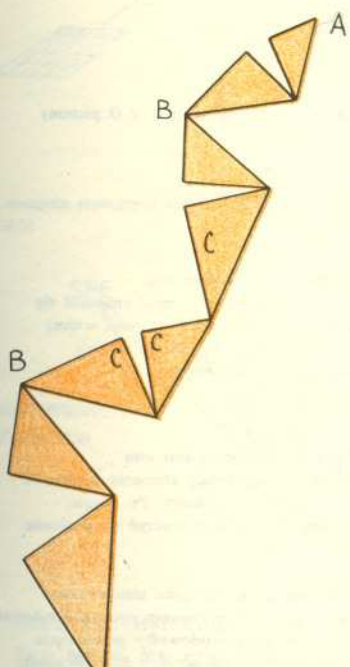
*

Praca G. Pólyi, drukowana w *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie* (1913), str. 303–313, zawiera dowód bez luki, która tu była; praca jest mimo upływu lat nadal wyjątkowo czytelna. We „Wstępie do teorii mnogości i topologii", wyd. II, 1947, str. 117, Sierpiński poleca inny dowód istnienia: trójkąt o bokach 3, 4 i 5 jest jednym z tych, o które chodzi. W tej samej książce na str. 112–118 jest mowa o łukach powstałych przez wycinanie z kwadratu (m.in. o łukach o polu dodatnim) i o odwzorowaniach Peany; są tam niektóre z pominiętych tu dowodów i dane do literatury.

*

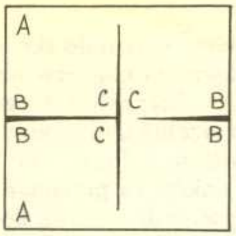
Hahn (1913) i Mazurkiewicz (1915) dowiedli, że przy każdym odwzorowaniu ciągłym odcinka na kwadrat pojawiają się wartości o krotności trzy lub większej. Konstrukcja Pólyi jest więc możliwie oszczędna. Konstrukcja Peany jest też pod tym względem dość oszczędna; odwzorowanie ma krotności tylko trzech rodzajów: 4, 2 i 1.

*



Rys. 7

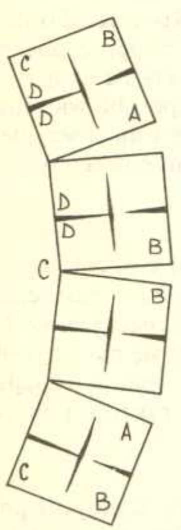
Konstrukcja Hilberta (1891, 1894) odwzorowania ciągłego odcinka na kwadrat, mniej oszczędna niż poprzednie, bo pojawiają się w niej wartości krotności 4, 3, 2 i 1, jest interesująca chociażby ze względu na inną girlandę prostokątów, do której prowadzi.



Rys. 8

Rozcina się kwadrat na cztery, ale sposób cięcia jest teraz nieco inny: od środka dolnego boku tniemy pionowo w górę do połowy, a dalej to cięcie rozgałęziamy poziomo dochodząc do lewego i prawego boku, jednak tak, aby figura pozostała spójna; potem robimy jeszcze rozcięcie pionowe od środka górnego boku w dół dochodząc do dokonanego już cięcia, ale znowu tak, aby figura pozostała spójna.

Dla zilustrowania tego, co robi się w drugim kroku konstrukcji, rozłóżmy powstałą figurę na kształt tabliczki czekolady i tnijmy każdy z czterech kwadratów od dołu, tak jak poprzednio cały. Dostajemy girlandę 16 prostokątów stykających się wierzchołkami, które w każdym z prostokątów sąsiadują ze sobą; tniemy je znowu tak samo, robiąc rozgałęzione cięcie zaczynające się na boku, którego końce są wierzchołkami sąsiadujących kwadratów, lub, jeśli to jest jeden z kwadratów skrajnych, zaczynające się na którymkolwiek boku stykającym się z sąsiednim kwadratem.
Odwzorowanie odcinka na kwadrat zbudowane według tego schematu ma wartości czterokrotne (D), trzykrotne (C), dwukrotne (B) i jednokrotne (A).



Rys. 9

*

Chcąc przekonać się o możliwości odwzorowania ciągłego odcinka na sześcian, wystarczy zbudować girlandę 27 sześcianów stykających się wierzchołkami, które w jednym sześcianie (jeśli to nie jest sześcian skrajny) leżą naprzeciw siebie, i przekonać się, że można ją złożyć, nie rozrywając połączeń, w jeden sześcian.

Rozwiązanie zadania F 43

Korzystając z I prawa Kirchhoffa, rozkład prądów w obwodzie możemy przedstawić tak, jak pokazano na rysunku. Z II prawa Kirchhoffa mamy następujące zależności:

(*) $E = RI_1 + R(I - I_2)$ (oczko ARDRBEA),

(**) $RI_1 = L\frac{d}{dt}(I - I_1)$ (napięcie na cewce ma być takie samo, jak na lewym oporze R),

(***) $\frac{Q}{C} = R(I - I_2)$ (napięcie na kondensatorze ma być takie samo, jak na prawym oporze R).

Q oznacza tu ładunek zgromadzony na kondensatorze. Oprócz powyższych trzech związków mamy jeszcze

zależność $$I_2 = \frac{dQ}{dt}.$$

Równanie (**) można zapisać w postaci $I_1 = \frac{L}{R}\frac{d}{dt}(I - I_1)$.

Natomiast równanie (***) po zróżniczkowaniu obu stron po czasie i skorzystaniu ze związku I_2 z Q piszemy

w postaci $$I_2 = RC\frac{d}{dt}(I - I_2).$$

Odejmując otrzymane równania stronami i korzystając ze związku $RC = L/R$, otrzymujemy

$$I_1 - I_2 = -RC\frac{d}{dt}(I_1 - I_2).$$

Jest to równanie różniczkowe opisujące zależność $I_1 - I_2$ od czasu. Równanie to nie zawiera siły elektromotorycznej $E(t)$. Wobec tego niezależnie od tego, jak E zależy od t, różnica $I_1 - I_2$ musi zmieniać się w czasie według takiego samego prawa. Ponieważ zależność $I_1 - I_2$ od czasu nie zależy od $E(t)$, więc weźmy $E(t) \equiv 0$. Ale po włączeniu $E(t) \equiv 0$ w układzie nic się nie dzieje: jak nie było prądów, tak nie ma ich nadal. Wynika stąd, że $I_1 - I_2 \equiv 0$, a więc $I_1 \equiv I_2$. Podstawiając to do wzoru (*) otrzymujemy

$$E = RI,$$

co oznacza, że część obwodu od A do B zachowuje się jak opór omowy o wartości R.
Zadanie powyższe było wykorzystane na zawodach II stopnia XXIII Olimpiady Fizycznej. Jest ono interesujące co najmniej z dwóch powodów. Po pierwsze już sam fakt, że układ zawierający elementy nieomowe (cewki, kondensatory) jako całość może zachowywać się jak opór omowy, jest bardzo ciekawy. Po drugie, z zadaniem tym wiąże się pewien problem ogólniejszy, którego środkami dającymi się wytłumaczyć na poziomie szkoły średniej nie udało mi się rozwiązać mimo wielu wysiłków w tym kierunku.
A oto sam problem:
Załóżmy, że mamy do dyspozycji cewki, kondensatory i opory omowe i że interesują nas tylko sinusoidalne siły elektromotoryczne typu $E = E_0 \sin\omega t$. Należy udowodnić, że z wymienionych elementów nie można zbudować obwodu, który po podłączeniu do źródła siły elektromotorycznej dla żadnego ω nie powodowałby przesunięcia fazowego między napięciem a natężeniem i którego opór wypadkowy R nie zależałby od ω: $R = R(\omega) \not\equiv \text{const}$.
Czytelników, którym udałoby się rozwiązać to zagadnienie metodami dającymi się wyjaśnić na poziomie szkoły średniej (lub niewiele wyższym), prosimy o przesłanie rozwiązania do Redakcji. Termin nadsyłania rozwiązań: 1X1977.