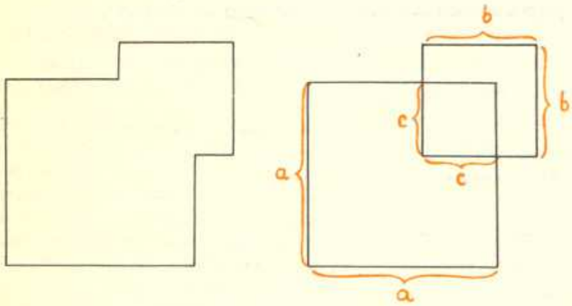
mała delta

Miary addytywne

Co pewien czas notujemy kolejny rekord dokładności pomiaru np. odległości Księżyca od Ziemi. Ostatnie słowo w tej dziedzinie należy do techniki laserowej. Rekordy rekordami, uprzytomnijmy jednak sobie olbrzymie praktyczne znaczenie sztuki mierzenia. Barometr mierzący ciśnienie powietrza to przyrząd niewątpliwie bardzo użyteczny. Światłomierz również, o czym doskonale wiedzą amatorzy fotografii. Umiejętność mierzenia napięcia prądu elektrycznego jest nieodzowna przy budowie różnych urządzeń elektronicznych, szczególnie tych najbardziej skomplikowanych, jak maszyny cyfrowe czy magnetofony najwyższej jakości. Matematyk także interesuje się sztuką mierzenia. Jako obiekty pomiaru służą mu jednak głównie zbiory, a więc twory dość abstrakcyjne. Rzecz jednak w tym, że abstrakcyjne miary mogą służyć za modele wielu miar stosowanych praktycznie. Dlatego matematyczna teoria miary jest pomocna specjalistom z różnych dziedzin.
Jednym z ważniejszych rodzajów miar rozważanych w tej teorii są miary addytywne. Co to takiego? Odwołajmy się do prostego przykładu — pola figury.

Pole figury ma następującą własność:

JEŚLI DWIE FIGURY NIE MAJĄ CZĘŚCI WSPÓLNEJ, TO POLE ICH SUMY JEST RÓWNE SUMIE ICH PÓL.



Własność ta umożliwia również obliczanie pola sumy takich figur, które nie są rozłączne.
Chcąc na przykład obliczyć pole figury na rysunku, można postąpić w ten sposób.
Przedstawmy figurę jako sumę dwóch kwadratów zachodzących częściowo na siebie i obliczmy:

POLE PIERWSZEGO KWADRATU
plus POLE DRUGIEGO KWADRATU
minus POLE ICH CZĘŚCI WSPÓLNEJ

czyli

$$a^2+b^2-c^2.$$

Uzasadnijcie, że jest to poprawny sposób liczenia.
Miara addytywna to taka miara, która ma następującą własność

JEŚLI DWA ZBIORY NIE MAJĄ CZĘŚCI WSPÓLNEJ, TO MIARA ICH SUMY RÓWNA SIĘ SUMIE ICH MIAR.

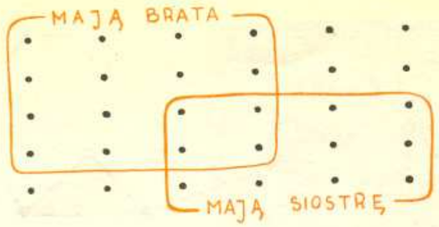
Pole figury to miara addytywna. Dla każdej miary addytywnej poprawny jest taki sposób liczenia miary sumy figur nierozłącznych, jaki zastosowaliśmy w tym przykładzie:

MIARA SUMY ZBIORÓW *równa się*
MIARA PIERWSZEGO ZBIORU *plus* MIARA DRUGIEGO ZBIORU *minus* MIARA ICH CZĘŚCI WSPÓLNEJ.

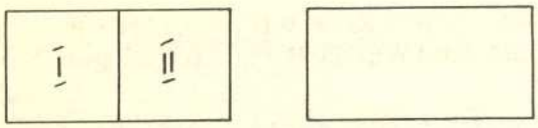
Zamiast kolejnego przykładu, proste zadanie. Na pytanie nauczycielki: „kto ma brata?" podniosło rękę do góry 16 uczniów. Na kolejne pytanie „kto ma siostrę?" podniosło rękę 12 uczniów, a na trzecie pytanie: „kto ma i brata i siostrę?" podniosły się 4 ręce. Ilu uczniów powinno podnieść rękę na pytanie: „kto z was ma rodzeństwo, to znaczy albo brata, albo siostrę, albo i brata i siostrę?"

Czy można zastosować metodę z poprzedniego przykładu? Naturalnie. Ilustruje to rysunek. Kropki to dzieci, pętle wyznaczają odpowiednio zbiór dzieci, które mają brata oraz zbiór dzieci, które mają siostrę. W części wspólnej, zgodnie z treścią zadania, są 4 kropki. Kropek w obu pętlach jest łącznie

$$16+12-4 = 24.$$



Liczba elementów zbioru to również miara addytywna.



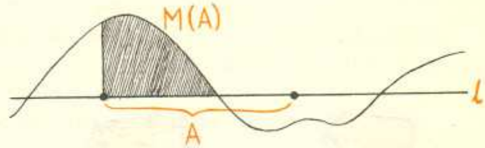
Nasuwa się pytanie: czy są jakieś miary nieaddytywne? Rozważmy długość brzegu figury na płaszczyźnie (brzegiem trójkąta, prostokąta itp. jest jego obwód). Obwód każdego z kwadratów na rysunku jest równy 4, obwód ich części wspólnej jest równy 1. Czy obwód całego prostokąta jest równy

$$4+4-1?$$

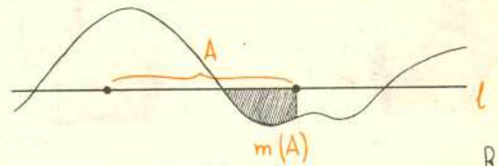
Miary addytywne mają bardzo wygodną własność: można je dodawać i odejmować, a wynikiem będzie zawsze miara addytywna.
Oto prosty przykład.
Na rysunku przedstawiony jest wykres pewnej funkcji i prosta l równoległa do osi x. Niech A będzie odcinkiem na prostej l.
Rozważymy dwie miary tego odcinka.
Pierwsza, oznaczmy ją $M(A)$, niech będzie polem figury z rysunku 1 (powyżej prostej l).
Druga, oznaczmy ją $m(A)$, niech będzie polem figury z rysunku 2 (poniżej prostej l).
Obie są miarami addytywnymi (sprawdźcie).
Ich różnica

$$M(A)-m(A)$$

jest miarą addytywną. Dla pewnych A miara ta może być ujemna. Podajcie odpowiedni przykład.



Rys. 1



Rys. 2

Zajmiemy się teraz pewną ciekawą miarą.
Niech Z będzie zbiorem, do którego należą: pewna ilość ścian wielościanu W, pewna ilość krawędzi tego wielościanu i pewna ilość wierzchołków.

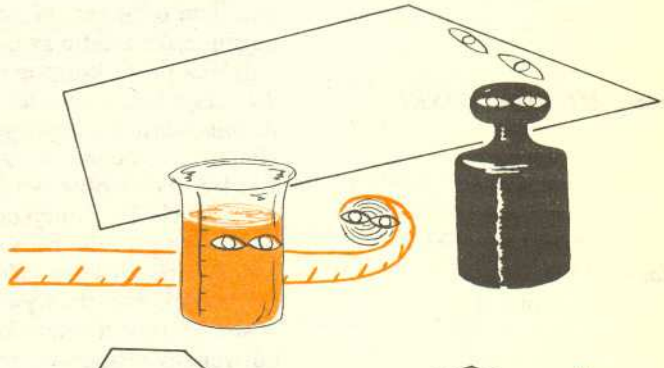
MIARA Z *równa się*

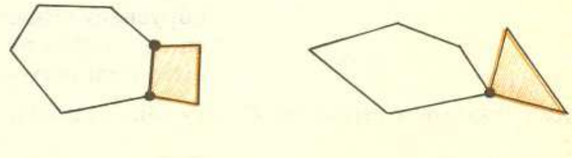
LICZBA WIERZCHOŁKÓW NALEŻĄCYCH DO Z
minus LICZBA KRAWĘDZI NALEŻĄCYCH DO Z
plus LICZBA ŚCIAN NALEŻĄCYCH DO Z.

Zastanówcie się, z których miejsc tego artykułu można wywnioskować, że jest to miara addytywna?

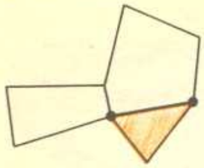
Obliczymy teraz miary różnych zbiorów.
Niech np. A będzie zbiorem o następujących elementach: jedna ze ścian wielościanu, wszystkie krawędzie tej ściany oraz wszystkie jej wierzchołki.
Miarą zbioru A jest 1, gdyż wierzchołków jest w nim tyle samo co krawędzi i ponadto jest jedna ściana.
Obliczmy teraz miarę sumy dwóch takich zbiorów.
Jeśli nie mają one części wspólnej miara jest równa 2.
Nie jest to jednak interesujący przypadek.
Jeśli natomiast częścią wspólną tych zbiorów jest krawędź lub wierzchołek, to, ponieważ miarą części wspólnej jest 1, miara całości jest równa

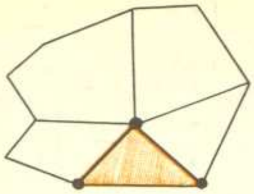
$$1+1-1 = 1.$$





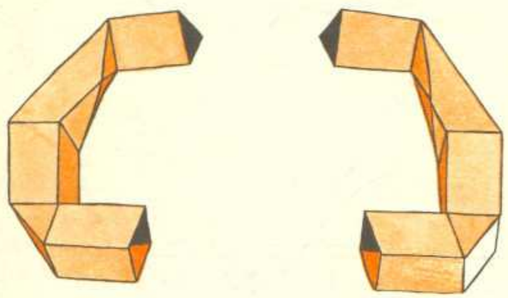
Dodajmy do poprzednich dwóch kawałków trzeci, czwarty i dalsze. Jeśli kolejne kawałki będziemy „doklejać" w odpowiedni sposób (za każdym razem wzdłuż spójnego brzegu), miarą całości będzie wciąż 1.





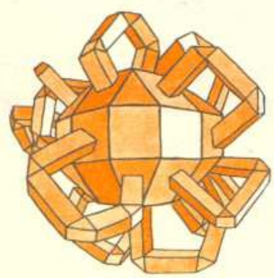
Skleiliśmy niemal cały wielościan — pozostał ostatni kawałek. Miara tego, co dotąd skleiliśmy jest równa 1. Doklejmy ostatni kawałek.
To ostatnie klejenie różni się istotnie od klejeń poprzednich, ponieważ miara części wspólnej klejonych części jest równa 0 (dlaczego?).
Ostatecznie, miarą całości (wszystkie ściany, wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki wielościanu) jest
$1+1-0 = 2$.
Tak więc
LICZBA WIERZCHOŁKÓW WIELOŚCIANU *W* *minus* LICZBA KRAWĘDZI *W plus* LICZBA ŚCIAN *W* *równa się* 2.

Uzyskany związek, odkryty przez Eulera, jest bardzo ciekawy i odegrał dużą rolę w historii matematyki, przyczyniając się do powstania nowego działu — teorii homologii.



Zadanie 1

Gajowy kontrolujący sektory A i B stwierdził, że na powierzonym mu obszarze wyznaczono do wyrębu więcej drzew liściastych niż iglastych. To samo stwierdził gajowy kontrolujący sektory B i C. — To niemożliwe — powiedział leśniczy — Wiem na pewno, że w sektorach A, B i C łącznie wyznaczono do wyrębu więcej drzew iglastych niż liściastych.
Informacje gajowych i leśniczego okazały się prawdziwe. Wytłumaczcie paradoks, który tak zdziwił leśniczego.



Zadanie 2

Obliczcie, ile wynosi
LICZBA WIERZCHOŁKÓW *Z minus* LICZBA KRAWĘDZI *Z plus* LICZBA ŚCIAN *Z*,
jeśli *Z* to:
(a) Wielościan *W* z dwiema „dziurami" (cały wielościan *W* poza dwiema nie stykającymi się ścianami).
(b) Dwa wielościany z dwiema dziurami odpowiednio wyciągnięte (jakby były z gumy) i sklejone brzegami dziur.
(c) Wielościan z doklejonymi *k* „uchami".

W Małej Delcie z numeru 2/1977 zaproponowaliśmy zabawę w stawianie pytań. Oto wybrane najciekawsze nadesłane pytania z komentarzem.

Urszula MROZOWSKA
Brzeg

Dlaczego planety świecą, to znaczy odbijają promienie słoneczne. Ziemia również odbija promienie, a przecież my tego nie zauważamy ani nie odczuwamy?
Jak to? Przecież widzimy nawet odległe przedmioty dzięki temu, że świecą one światłem odbitym. W nocy widoczność jest zwykle bardzo ograniczona, bo najsilniejsze źródło światła, jakim jest Słońce, jest zasłonięte. Ziemia widziana z daleka przez kosmonautów jest bardzo ładna, niebieskawobiała.

Cezary MINDYKOWSKI
Łódź

Dlaczego łącząc dwa identyczne baloniki, z których tylko jeden jest nadmuchany, nie doprowadzamy do jednakowego nadmuchania obu baloników?
(Pytanie skrócone przez redakcję).
Bardzo trafna obserwacja. Można to samo pokazać również przy pomocy baniek mydlanych. Im mniejsza bańka, tym większe panuje w niej ciśnienie. Dlatego powietrze przechodzi z małej do większej bańki.

Adam LANDOWSKI
Gdańsk

Czy światło wywiera ciśnienie, a jeżeli tak, to ile waży foton?
Oczywiście światło wywiera ciśnienie, o czym można się przekonać, obserwując w sprzyjających warunkach ogon komety. Zwykle odchyla się on od Słońca odpychany ciśnieniem promieniowania słonecznego. Masa jest równoważna energii. Foton ma energię odwrotnie proporcjonalną do długości fali. Ma więc masę i jest przyciągany przez Ziemię. Można więc obliczyć wagę fotonu.

Nagrodę książkową otrzymuje Cezary Mindykowski.