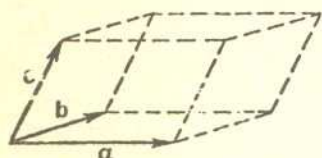
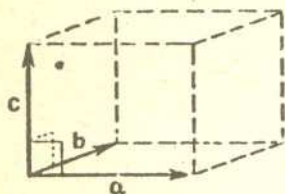


# Symetrie w kryształach

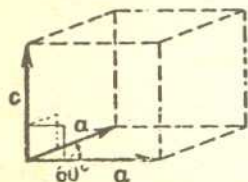
Doc. dr Jerzy BARTKE



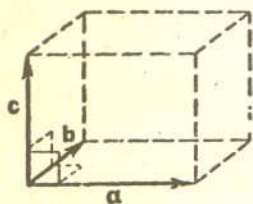
trójskośny



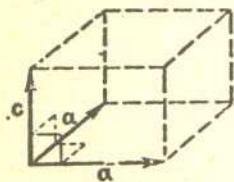
jednoskośny



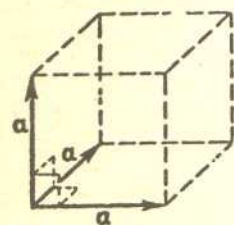
heksagonalny



rombowy

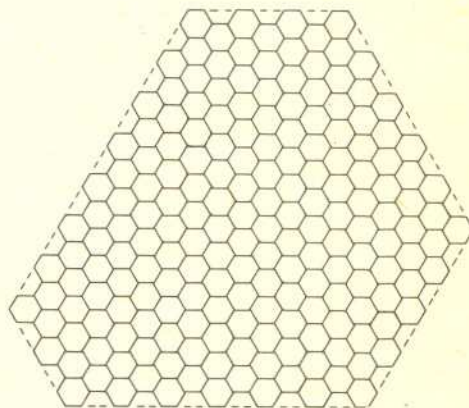
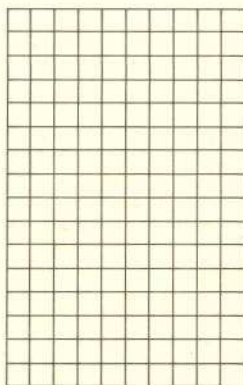


tetragonalny



regularny

Zapewne każdy z Czytelników miał okazję oglądać kryształy różnych minerałów. To, co nas uderza przy oglądaniu kryształów (poza piękną często barwą, którą jednak nie będziemy się tutaj zajmować) — to regularność ich kształtu. Np. kryształy soli kuchennej są prostopadłościanami, kryształy kwarcu natomiast są graniastosłupami o sześciokątnym przekroju. Długości poszczególnych krawędzi kryształu są na ogół różne, ale kąty pomiędzy jego ścianami są zawsze ściśle określone. W przypadku kryształu soli kuchennej kąty między ścianami wynoszą  $90^\circ$ , a w przypadku kryształu kwarcu  $120^\circ$ . Naturalnym wyjaśnieniem tych faktów jest, że kształt zewnętrzny (morfologia) kryształu odzwierciedla jego wewnętrzną strukturę. Kryształ składa się z wielkiej liczby tzw. komórek elementarnych o kształcie ściśle określonym dla danego rodzaju substancji. W przypadku soli kuchennej komórka elementarna jest sześcianem, a w przypadku kwarcu komórka elementarna ma przekrój regularnego sześciokąta. W procesie krystalizacji dopływ substancji krystalizującej bywa na ogół nierównomierny i dlatego szybkość wzrostu kryształu w różnych kierunkach jest niejednakowa. W wyniku tego zewnętrzne krawędzie kryształu mają na ogół różne długości, ale kąty między odpowiednimi ścianami są zawsze zachowane, ponieważ określone są one przez kształt elementarnej komórki. Wyjaśnia to poniższy rysunek.

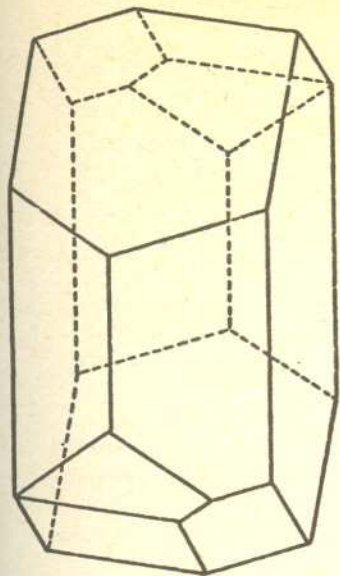


Przy równomiernym dopływie substancji krystalizującej szybkość powielania komórki elementarnej (czyli wzrostu kryształu) jest we wszystkich kierunkach jednakowa i w takich warunkach powstaje kryształ idealny. Postać zewnętrzna takiego kryształu ma te same elementy symetrii, co jego sieć strukturalna. Kryształy klasyfikuje się według występujących w nich kombinacji elementów symetrii, do których należą: środek symetrii, oś symetrii, płaszczyzna symetrii i tzw. oś inwersyjna. Dla osi symetrii określamy poza tym jej krotność  $n = 360/\alpha$ , gdzie  $\alpha$  oznacza najmniejszy kąt obrotu względem osi, przy którym struktura kryształu się powtarza. Oś może być dwukrotna, trzykrotna, czterokrotna lub sześciokrotna. W zależności od rodzaju symetrii zalicza się kryształ do jednego z sześciu tzw. układów krystalograficznych. Rysunek na marginesie artykułu pokazuje komórki elementarne tych sześciu układów, ułożone w kierunku wzrastającej symetrii. Komórka układu trójskośnego jest równoległościanem i sieć krystaliczna jest jedynie symetryczna względem inwersji. W sieci jednoskośnej występuje dwukrotna oś symetrii, w sieci heksagonalnej sześciokrotna oś symetrii, w sieci rombowej trzy dwukrotne osie symetrii. W sieci tetragonalnej występuje jedna oś czterokrotna i dwie dwukrotne i wreszcie w najbardziej symetrycznej sieci regularnej występują trzy czterokrotne osie symetrii.

Współczesne badania struktury kryształów, dokonywane przez rozpraszanie promieni X, elektronów czy neutronów, pozwalają na dokładne określenie długości krawędzi komórki elementarnej (czyli tzw. stałych sieciowych) oraz kątów występujących w sieci krystalicznej. Badania te wykazały także, że atomy, jony, czy też cząsteczki tworzące kryształ mogą znajdować się nie tylko w wierzchołkach komórki elementarnej, ale także na jej ścianach lub w jej środku. Informacje te pozwalają na dalszy podział kryształów na większą liczbę tzw. klas.

Czasem wyróżnia się jeszcze siódmy układ — trygonalny, który można jednak włączyć do układu heksagonalnego (posiada on jedną trzykrotną oś symetrii).





Anortyt  $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_3$

Podstawowe znaczenie zachowuje jednak podział na układy oparty na własnościach symetrii sieci krystalicznej. Wewnętrzne symetrie kryształów znajdują bowiem odzwierciedlenie w ich makroskopowych własnościach fizycznych. Przy pomiarach mechanicznych, elektrycznych, czy też optycznych kryształy wykazują własności anizotropowe. Wielkość mierzona zależy od kierunku dokonywanego pomiaru i w pewnych określonych kierunkach przyjmuje wartości ekstremalne. Nietrudno domyślić się, że kierunki te pokrywają się z osiami symetrii sieci krystalicznej. Jedynie kryształy należące do układu regularnego wykazują własności izotropowe.

Matematycznie opisuje się tę sytuację wprowadzając tzw. tensory. Np. dla opisanego polaryzowalności elektrycznej kryształu musimy w najogólniejszym przypadku podać dziewięć liczb. Liczby te są współczynnikami występującymi w trzech równaniach liniowych wiążących składowe wektora polaryzacji  $P$  ze składowymi wektora pola elektrycznego  $E$  i tworzą tzw. tensor polaryzowalności elektrycznej. Dla kryształów o wyższej symetrii niektóre z tych współczynników są równe, zatem ich efektywna liczba ulega zmniejszeniu. W granicznym przypadku kryształu należącego do układu regularnego tensor redukuje się do jednej stałej.

Rozpoczęliśmy ten artykuł od stwierdzenia, że morfologia kryształu określona jest przez formę jego elementarnej komórki. Do tego wniosku można dojść metodą prostej dedukcji i właściwie można sobie zadać pytanie, dlaczego starożytni filozofowie już dwa tysiące lat temu nie rozważali różnych postaci sieci krystalicznej i jej symetrii. Najwidoczniej po prostu nie zainteresowali się sprawą wyjaśnienia regularności kształtu kryształów...

## Dualność

Dr Marek KORDOS

Weźmy pod uwagę teorię, w której mówi się o obiektach dwojakiego rodzaju — mamy więc w niej dwa rodzaje zmiennych, niech będą to małe litery łacińskie:  $a, b, c, \dots$  dla oznaczenia obiektów jednego rodzaju i duże:  $A, B, C, \dots$  dla oznaczenia obiektów drugiego. Niech nasza teoria mówi o pewnej relacji między obiektami różnych rodzajów — oznaczmy tę relację znakiem  $|$ .

Jeżeli chcemy napisać, że dwa obiekty są w naszej relacji, musimy umieścić oznaczające je litery obok kreski. Który po której stronie? Aby nie dyskryminować ani pierwszego, ani drugiego rodzaju obiektów umówmy się, że

*napis  $a|A$  znaczy to samo, co napis  $A|a$ .*

Teorię o takiej, jak podaliśmy wyżej, budowie nazywamy autodualną, jeżeli spełnia ona warunek:

**Zasada dualności (syntaktyczna):**

*Jeżeli w twierdzeniu teorii zamienimy wszystkie litery małe na duże (różne na różne) i odwrotnie, to otrzymane zdanie będzie również twierdzeniem teorii.*

Tak więc teoria samodualna jest bardzo przyjemna — każdy dowód daje nam od razu dwa twierdzenia.

Modele teorii autodualnej, czyli struktury, jakie ta teoria opisuje, też mają zalety. Każdy model teorii o budowie opisanej na wstępie jest postaci  $\langle u, U, | \rangle$ , czyli składa się z dwóch zbiorów i relacji między elementami tych zbiorów. Jeżeli teoria jest autodualna, to prawdziwe jest zdanie:

**Zasada dualności (semantyczna):**

*Jeżeli struktura  $\langle u, U, | \rangle$  jest modelem teorii, to również struktura  $\langle U, u, | \rangle$  jest jej modelem.*

A więc gdy znajdziemy jakiś model teorii autodualnej, „automatycznie” mamy i drugi.

Określenia „syntaktyczna” i „semantyczna” przy zasadach dualności podkreślały fakt, że za pierwszym razem mówiliśmy o napisach, a za drugim o ich znaczeniu.

No dobrze, ale czy w ogóle istnieją teorie autodualne i czy mają one jakieś znaczenie?

