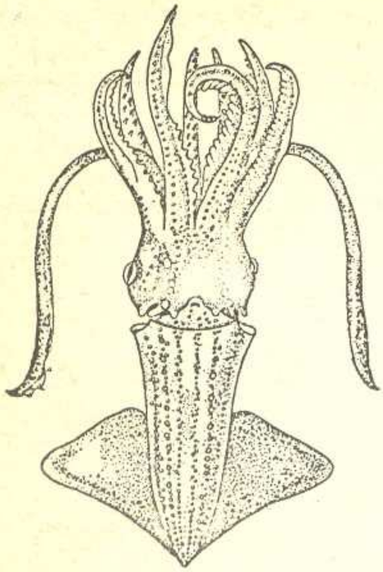


Podamy przykład takiej teorii podając jej aksjomaty:

Aks. 1. Dla dowolnych a i b istnieje A, takie, że $a, b \mid A$.

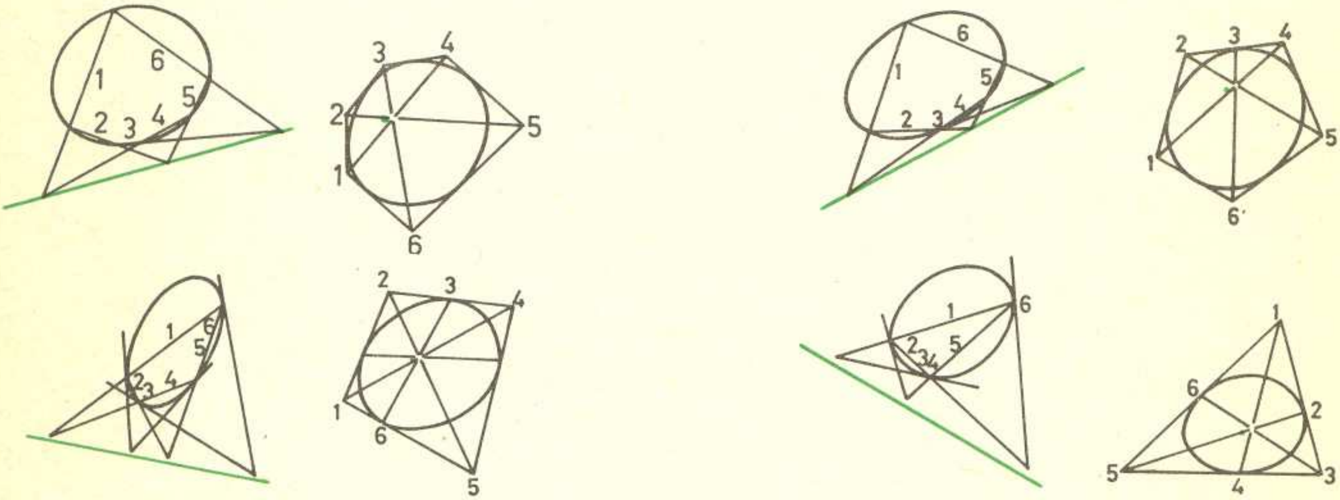
Aks. 2. Dla dowolnych A i B istnieje a, takie, że $A, B \mid a$,

Aks. 3. Jeśli $a, b \mid A, B$, to $a = b$ lub $A = B$.

Aks. 4. Istnieją takie a, b, c, d, A, B, C, D, że równocześnie zachodzi

$a, b \mid D$ i $b, c \mid C$ i $c, d \mid B$ i $d, a \mid A$
oraz nie zachodzi ani $a \mid B$, ani $a \mid C$, ani $b \mid A$,
ani $b \mid B$, ani $c \mid A$, ani $c \mid D$, ani $d \mid C$, ani $d \mid D$.

Teoria ta ma wiele modeli. Między innymi model jej można uzyskać z płaszczyzny euklidesowej, uzupełniając każdą prostą dodatkowym „punktem" — jej kierunkiem, oraz wprowadzając dodatkową „prostą" złożoną z samych kierunków. Wówczas jako **u** bierzemy zbiór wszystkich punktów (zwykłych i dodatkowych), jako **U** — zbiór wszystkich prostych (zwykłych i dodatkowej), a jako | — relację leżenia punktu na prostej. Teoria o podanej aksjomatyce nazywa się *geometrią rzutową* i jest uprawiana szeroko od XVII wieku (pierwszy podręcznik w 1822 roku — Poncelet). Ale czy jest autodualna? Aby się o tym przekonać wystarczy sprawdzić, że zamiana liter małych na duże i odwrotnie przeprowadzi nasz układ aksjomatów na siebie (1 na 2, 2 na 1, 3 na 3 i 4 na 4 — to ostatnie tylko nie jest widoczne na pierwszy rzut oka). A więc i cała teoria, jako zbiór konsekwencji tego układu aksjomatów, nie zmieni się.
A jak wygląda model dualny do opisanego?



Przedstawione cztery pary rysunków ilustrują wzajemnie dualne twierdzenia Pascala i Brianchona.

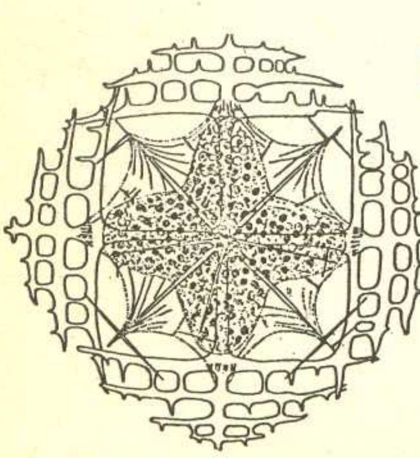
Boki	*sześciokąta*	*wpisanego w elipsę*	*mają tę własność, że*	*ich punkty przecięcia leżą na jednej prostej*
Wierzchołki		*opisanego na elipsie*		*łączące je proste przechodzą przez jeden punkt*

Sytuację tę ilustruje pierwsza para rysunków.

Na następnych rysunkach mamy przedstawione sytuacje zdegenerowane, kiedy pewne sąsiednie

wierzchołki	sześciokąta	wpisanego pokryły się	a	łączące je boki	stały się	stycznymi do	elipsy.
boki		opisanego leżą na jednej prostej,		ich wspólne końce		punktami	

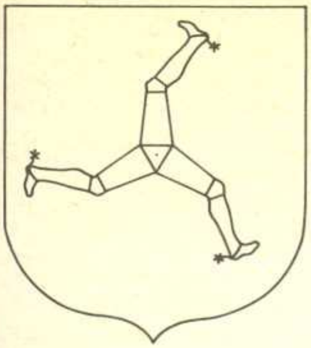
Twierdzenia pozostają w mocy również dla paraboli i hiperboli.



Przekształcenia zwane symetriami

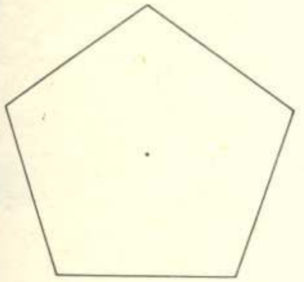
Dr Ludomir WŁODARSKI

Słowo „symetria" w mowie potocznej używane bywa w najróżniejszych kontekstach. Mówi się np. o symetrii w obrazie, o symetrii w budowie utworu muzycznego, o symetrii we wzajemnych stosunkach między państwami. Takie użycie tego słowa jest uzasadnione, gdyż w dosłownym tłumaczeniu „symetria" znaczy tyle co „współmierność". W geometrii symetriami nazywa się pewnego rodzaju przekształcenia. Przyjrzyjmy się symetriom w geometrii. Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną figurą na płaszczyźnie lub w przestrzeni euklidesowej (figurą nazywamy każdy zbiór punktów). Wśród wszystkich wzajemnie jednoznacznych przekształceń figury $\mathcal{F}$ na siebie wyróżniamy *izometrie*, czyli takie przekształcenia, które nie zmieniają odległości między punktami.



Rodzinę takich izometrii oznaczmy przez $S(\mathscr{F})$. Łatwo się przekonać, że rodzina ta ma następujące własności:
1° — przekształcenie tożsamościowe figury $\mathscr{F}$ należy do rodziny $S(\mathscr{F})$,
2° — jeżeli przekształcenie φ należy do $S(\mathscr{F})$, to i przekształcenie φ^{-1} (odwrotne do φ) również należy do $S(\mathscr{F})$,
3° — złożenie dowolnych przekształceń z rodziny $S(\mathscr{F})$ należy do $S(\mathscr{F})$.
Rodzina $S(\mathscr{F})$ nazywa się *grupą izometrii własnych* figury $\mathscr{F}$. W przypadku, gdy $\mathscr{F}$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny euklidesowej, niektóre izometrie z rodziny $S(\mathscr{F})$ noszą nazwę *symetrii*. Są to symetrie osiowe i symetrie środkowe. Wśród nietożsamościowych izometrii płaszczyzny wyróżniają się tym, że są *inwolucjami*, tzn. są identyczne z przekształceniami odwrotnymi do siebie. Podobnie wśród izometrii całej przestrzeni symetrie osiowe, środkowe i płaszczyznowe wyróżniają się jako inwolucje. Jeżeli figura $\mathscr{F}$ jest właściwym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej (przestrzeni), to rodzina $S(\mathscr{F})$ bywa nazywana *grupą symetrii* figury $\mathscr{F}$. Jeżeli przy tym $S(\mathscr{F})$ zawiera choć jedno przekształcenie różne od tożsamościowego, to o figurze $\mathscr{F}$ mówi się, że *ma* ona *symetrię*.

Zarówno płaszczyzna jak i przestrzeń euklidesowa są *doskonale jednorodne*. Oznacza to, że gdy φ jest izometrią pewnej figury $\mathscr{F}$ (niekoniecznie izometrią własną), to istnieje izometria ψ całej płaszczyzny (przestrzeni) identyczna z φ na całej figurze $\mathscr{F}$. Dzięki temu można zastąpić badanie grupy symetrii figury $\mathscr{F}$ badaniem tych izometrii płaszczyzny (przestrzeni) na siebie, które zachowują figurę $\mathscr{F}$ (ewentualnie przemieszczając jej punkty). Tak więc i izometrie własne figury nazywają się tak samo, jak odpowiednie izometrie płaszczyzny czy przestrzeni: obroty, przesunięcia, symetrie środkowe, symetrie osiowe, symetrie płaszczyznowe itd.



Jeżeli w grupie symetrii figury $\mathscr{F}$ znajduje się symetria o osi l, to prosta l nazywa się osią symetrii figury $\mathscr{F}$. O takiej figurze mówi się, że ma *symetrię osiową*. Podobnie określa się środek symetrii oraz płaszczyznę symetrii figury. Może się zdarzyć, że grupa symetrii figury płaskiej składa się z samych obrotów. Łatwo udowodnić, że wszystkie te obroty mają wspólny środek. O takiej figurze mówi się, że ma *symetrię obrotową*. Klasycznym przykładem jest złowrogi znak swastyki. Taką symetrię ma również herb brytyjskiej wyspy Man.
Punkt, który jest środkiem jakiegokolwiek obrotu należącego do $S(\mathscr{F})$, nazywa się *środkiem* figury $\mathscr{F}$ — nie musi on być wcale środkiem symetrii tej figury — tak jest np. ze środkiem wielokątów foremnych o nieparzystej liczbie wierzchołków.

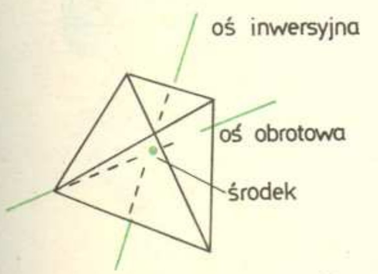
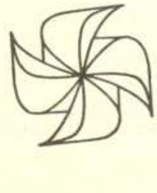


Figura przestrzenna (trójwymiarowa) oprócz środków symetrii, osi symetrii i płaszczyzn symetrii może mieć tzw. osie obrotowe i osie inwersyjne:
— prosta l nazywa się *osią obrotową* figury $\mathscr{F}$ jeżeli w grupie symetrii tej figury znajdują się obroty o osi l,
— prosta l nazywa się *osią inwersyjną* figury $\mathscr{F}$, jeżeli do grupy symetrii figury $\mathscr{F}$ należy tzw. symetria obrotowa o osi l, tzn. przekształcenie będące złożeniem obrotu o osi l i symetrii względem płaszczyzny prostopadłej do l.
Środek figury przestrzennej to punkt, w którym przecinają się różne osie tej figury (osie symetrii, osie obrotowe, osie inwersji) — nie musi on być środkiem symetrii — vide czworościan foremny.
O figurze przestrzennej w krystalografii mówi się, że ma *symetrię obrotową*, jeżeli pewna jej oś obrotowa nie leży w żadnej płaszczyźnie symetrii tej figury.

Grupę symetrii figury przestrzennej charakteryzuje się zwykle przez opisanie wszystkich środków symetrii, osi symetrii, osi obrotowych, osi inwersyjnych i płaszczyzn symetrii figury. W ten sposób postępują np. krystalografowie, klasyfikując kryształy ze względu na ich grupy symetrii.

W geometrii termin „symetria" bywa używany również w zastosowaniu do przekształceń, które nie są izometriami. Mamy tu na myśli tzw. symetrię skośną i symetrię względem okręgu.
Symetrię skośną φ o osi l i kierunku prostej $k \nparallel l$ określają warunki:



dla dowolnego punktu A
— środek odcinka $A\varphi(A)$ leży na prostej l,
— przez A i $\varphi(A)$ przechodzi prosta równoległa do k.
Natomiast symetrie względem okręgu nazywają się inaczej przekształceniami inwersyjnymi. Można o nich przeczytać w Delcie 7/1976.
Zainteresowanym polecamy książkę H. Weyla zatytułowaną „Symetria".