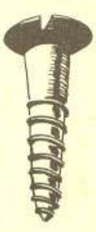
mała delta

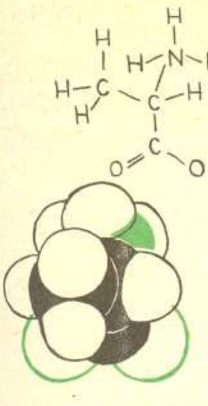
„Czy chciałbyś mieszkać w Domu po Drugiej Stronie Lustra, Kiciu? Ciekawa jestem, czy dawaliby ci tam mleko? Może to Lustrzane mleko nie nadaje się do picia..."

(*L. Carroll, „O tym, co Alicja odkryła po drugiej stronie lustra*".)

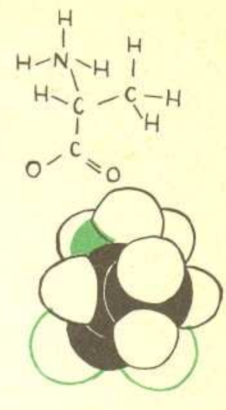
Stań przed lustrem i popatrz na swój obraz. Czy tam, „w zwierciadle" stoisz Ty, czy ktoś całkiem odmienny? Nie spiesz się z odpowiedzią. Zawsze warto przedtem chwilę pomyśleć. Poobserwuj Jego ruchy. Którą ręką pisze? Po której stronie ma serce? To przecież całkiem inny człowiek. Nie tylko Ciebie zwierciadło tak odmienia. Poszukaj w domu zwykłego wkrętu do drewna i przypatrz się uważnie jego odbiciu w lustrze. Wkręt tam, w lustrze, jest inny. Aby go wkręcić, należałoby go obracać w przeciwnym kierunku niż wkręty normalnie spotykane, czyli — patrząc z góry — w lewą stronę. Powiemy, że wkręt, ten w lustrze, ma budowę lewoskrętną w odróżnieniu od zazwyczaj używanych prawoskrętnych.



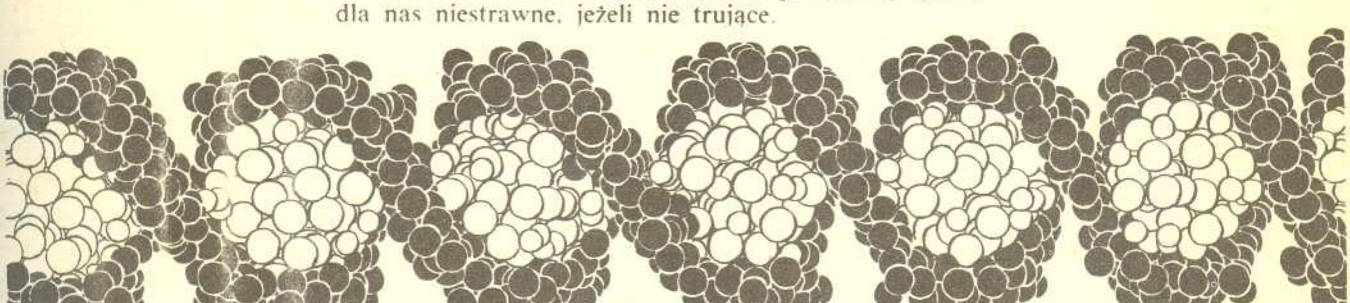
Dla stolarza jest w zasadzie obojętne, czy używa lewo- czy prawoskrętnych wkrętów. Oczywiście nie byłby zadowolony, gdyby dać mu i jedne i drugie. Często myliłby się i zamiast wykręcać dokręcałby jeszcze mocniej, co nie ułatwiałoby mu pracy. Zapewne zdecydowałby się na jeden rodzaj wkrętów, a resztę powyrzucał.



Coś podobnego zdarzyło się wśród związków chemicznych wchodzących w skład organizmów żywych. Cząsteczki niektórych z tych związków, chemicy nazywają je aminokwasami, można przyrównać do śruby — oczywiście tylko pod względem kształtu. Można więc powiedzieć, czy cząsteczka jest lewo-, czy prawoskrętna. W tym miejscu zaczyna się dziwna historia. Cząsteczki wytworzone w laboratoriach, chemicy mówią: zsyntetyzowane, w połowie są lewoskrętne, w połowie prawoskrętne. Wytworzone biologicznie, a więc przez organizmy żywe, mają zawsze budowę lewoskrętną. Można to zrozumieć, jeżeli założymy, że wczesne formy życia na Ziemi wywodziły się ze związków chemicznych zarówno lewoskrętnych jak i prawoskrętnych. Organizmy złożone ze związków jednej odmiany powinny być niestrawne i prawdopodobnie trujące dla istot żywych złożonych ze związków drugiej odmiany. Ostatecznie zwyciężyliśmy my — lewoskrętni. Być może gdzieś indziej, we Wszechświecie, zwyciężyli prawoskrętni. Ten inny świat mógłby być właśnie czarodziejskim światem ze zwierciadła i mleko w tym świecie z pewnością byłoby dla nas niestrawne, jeżeli nie trujące.



To my!



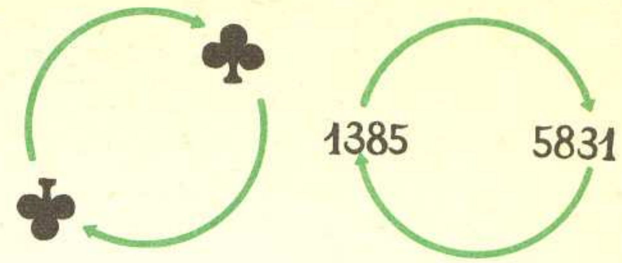
Jaki też może być ten świat lustrzany, do którego Alicja zapraszała kotka? Czy kotek, przeniesiony do niego, potrafiłby wykryć za pomocą doświadczeń fizykalnych, że został zaczarowany? Innymi słowy, czy obserwując doświadczenie fizykalne w lustrze i nie wiedząc o tym, możemy na podstawie jego wyników rozstrzygnąć, czy obserwujemy lustrzane odbicie, czy nie? Do niedawna kotek byłby bezradny. Wszystkie znane procesy fizyczne nie rozróżniały, co to strona prawa i lewa. Fizycy ujęli to w formie zasady. *Zwierciadlany obraz zjawiska fizycznego jest również zjawiskiem fizycznym.* Nazwali tę zasadę, z sobie znanych powodów, zasadą zachowania parzystości. Spróbujcie ją sprawdzić obserwując znane, proste zjawiska fizyczne w lustrze. Odpowiedzcie na pytanie, czy przebieg zjawiska obserwowany w lustrze jest sprzeczny z tym, co znamy z fizyki. Np. swobodny spadek ciał, topienie się lodu w wodzie itp. Na pewno zgodzicie się z zasadą zachowania parzystości.

Kotek nie ma możliwości sprawdzenia fizycznego, czy jest w zwierciadle. Może oczywiście napić się mleka, które mu zaszkodzi, ale to nie jest sposób fizyka, lecz czarnoksiężnika. Spróbujcie bowiem skosztować odbicia zwierciadlanego mleka — ja nie potrafię. Jeżeli kotek uczyłby się fizyki jądrowej, sytuację miałby ułatwioną.
21 lat temu odkryto bowiem procesy, które naruszają zasadę zachowania parzystości. Ale o tym ani autor przygód Alicji, ani żaden czarnoksiężnik nie mógł wiedzieć.
Lepiej jednak nie pić mleka niewiadomego pochodzenia.

OTO DWA NAPISY:

125SZI i 125521

Który z nich jest symetryczny? Geometrycznie tylko ten pierwszy. Widoczne jest jednak, że i drugi z napisów odznacza się pewną symetrią budowy. Na czym jednak ta symetria polega? Odpowiedź jest prosta: czytany od przodu jest taki sam, jak czytany od tyłu. Ponieważ jednak matematyk lubi określenia dokładniejsze, zastanówmy się, w jaki sposób wyrazić to ściślej. Zróbmy takie porównanie.



* * *

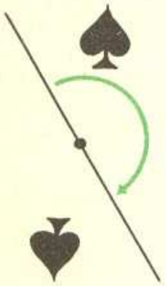
Tu zajmiemy się figurami na płaszczyźnie:

Tu zajmiemy się napisami takiej postaci:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

przy czym zamiast liter a_1, a_2, a_3 itd. trzeba wstawić cyfry.

Tu zbadamy obrót wokół środka o kąt 180°:



Tu zbadamy przekształcenie:

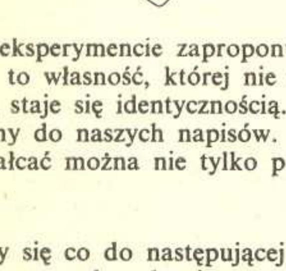
$$a_1 a_2 \dots a_n \to a_n \dots a_2 a_1.$$

Oto jak zmienia ono różne napisy:

1385 → 5831
2200 → 0022
3113 → 3113
4200524 → 4250024 itd.

Ważna własność obu przekształceń:
wykonane dwa razy po kolei niczego nie zmieniają,
wszystko wraca do pierwotnego położenia.

Tu figury symetryczne to takie figury, które nie zmieniają się przy pewnym obrocie o 180°:



Tu napisy symetryczne to takie napisy, które nie zmieniają się po zastosowaniu naszego przekształcenia:

2005002 → 2005002

* * *

Po tym eksperymencie zaproponuję następującą definicję symetrii:
symetria to własność, której nie zmienia przekształcenie specjalnego rodzaju — takie, które wykonane dwa razy po kolei staje się identycznością.
Powróćmy do naszych napisów.
Przekształcać można nie tylko pojedyncze napisy, lecz także całe ich zbiory

$$\{223, 850, 3222, 4, 33\} \to \{322, 058, 2223, 4, 33\}.$$

Umówmy się co do następującej definicji.
Jeśli pewne przekształcenie ma tę własność, że wykonane dwa razy po kolei daje identyczność i jeśli przekształca ono zbiór A na zbiór B, wówczas parę zbiorów: A i B nazwiemy parą zbiorów wzajemnie symetrycznych ze względu na to przekształcenie.
Interesować nas będzie jedna własność takiej pary: oba zbiory wzajemnie symetryczne mają zawsze po tyle samo elementów.

Podamy kilka przykładów.

Przykład 1

Przekształćmy każdą liczbę całkowitą na liczbę do niej przeciwną:

$$a \to -a.$$

Przykładowo:

$$6 \to -6, \quad 0 \to -0, \quad -2 \to 2 \quad \text{itd.}$$

A oto pary zbiorów wzajemnie symetrycznych przy tym przekształceniu

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \text{ i } \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\},$$
$$\{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ i } \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$
$$\{100, -10, 1, 0, -1\} \text{ i } \{1, 0, -1, 10, -100\}.$$

Przykład 2

Bilety autobusowe oznaczone są sześciocyfrowymi numerami, np. 005839, 998277, 555555 itp. Sprawdźmy, czy bilet, który kupiliśmy, nie jest czasem szczęśliwym „oczkiem", to znaczy takim, że sumą jego cyfr jest 21. Oto kilka szczęśliwych numerów: 209613, 007815, 333336, 707070.

Numery biletów będziemy przekształcać w taki sposób:

$$209613 \to 790386$$
$$007815 \to 992184$$
$$333336 \to 666663$$
$$707070 \to 292929.$$

Zasadę, według której przekształcamy numery, opisuje wzór:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \to (9-a_1)(9-a_2)(9-a_3)(9-a_4)(9-a_5)(9-a_6).$$

Pojawiła się interesująca nas własność: przekształcenie to wykonane dwa razy po kolei staje się identycznością. Możemy zatem badać pary zbiorów wzajemnie symetrycznych. A więc do dzieła.

$$A = \text{zbiór szczęśliwych oczek} = \{209613, 007815, 333336, \ldots\}$$

Jak wygląda zbiór B symetryczny do A?

$$B = \{790386, 992184, 666663, \ldots\}$$

Okazuje się, że nietrudno ten zbiór określić:

$$B = \text{zbiór numerów z sumą cyfr } 33.$$

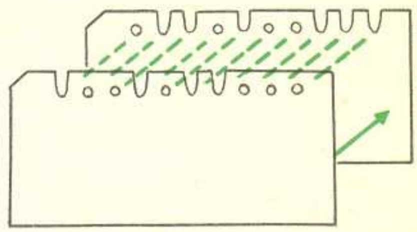
(Uzasadnijcie dlaczego!)

Nie obliczyliśmy wprawdzie, ile jest różnych numerów ze szczęśliwą sumą 21 — udowodniliśmy natomiast, że jest ich dokładnie tyle, ile numerów z sumą cyfr 33.

Przykład 3

Kartoteka kart z perforowanym brzegiem zawiera karty podziurkowane dziesięcioma dziurkami.

Przekształcenie, jakie zbadamy, opisuje rysunek:



Dziurki nacięte zastępujemy nie naciętymi i na odwrót.

Bez trudu stwierdzicie, że poniższe pary zbiorów to pary zbiorów wzajemnie symetrycznych:

karty nacięte raz	i	karty nacięte dziewięciokrotnie,
karty nacięte czterokrotnie	i	karty nacięte sześciokrotnie, itp.

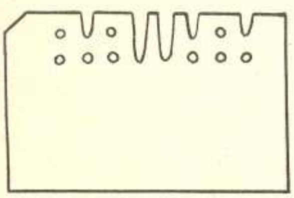
Na zakończenie, jak zwykle, zadania.

Zadanie 1. Czy kart naciętych parzystą ilość razy (w tym karta nie nacięta ani razu) jest tyle samo, co kart naciętych nieparzystą ilość razy? (Cała sztuka polega na znalezieniu odpowiedniego przekształcenia, pomyślcie jakiego!)

Zadanie 2. W pewnej kartotece kart z perforowanym brzegiem karty dziurkowane są dwoma rzędami dziurek, a nacinać je można dwoma sposobami: płytko lub głęboko.

Dobierzcie kilka odpowiednich przekształceń i odpowiedzcie, jakie mogą być zbiory symetryczne do następującego:

karty nacięte w dwóch miejscach głęboko, w trzech płytko i w pięciu miejscach nie nacięte.



Małą Deltę opracowali: Tomasz HOFMOKL i Przemysław NOWICKI