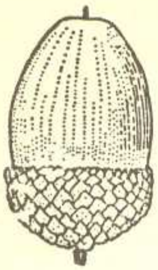
Inwolucje



Mgr Krzysztof Prażmowski

Niech I oznacza przekształcenie tożsamościowe (tzn. $I(x) = x$). Funkcję f o dziedzinie X i o wartościach w X nazywamy *inwolucją* jeśli spełnia ona warunek $ff = I$. Warunek ten można zapisać też w następujący sposób:
dla dowolnego $x \in X$ $\quad f(f(x)) = x$
lub
dla dowolnych $x, y \in X$ $\quad f(x) = y \rightarrow f(y) = x$.
A więc inwolucje są „symetriami wśród funkcji". Inwolucją w zbiorze liczb rzeczywistych jest np. funkcja $f_1(x) = 1-x$, w zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera np. $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$.
Tę ostatnią funkcję można przedłużyć na cały zbiór liczb rzeczywistych przyjmując

$$f_2^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = 0, \\ f_2(x) & \text{gdy } x \neq 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że

1. *Inwolucja jest funkcją różnowartościową.*

Istotnie, mamy

$$f(x) = f(y) \rightarrow x = f(f(x)) = f(f(y)) = y.$$

2. *Zbiór wartości inwolucji pokrywa się z jej dziedziną.*

Dowolny element x zbioru X jest bowiem obrazem należącego do X elementu $f(x)$.
Funkcję różnowartościową ze zbioru X w zbiór Y, której zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem Y, nazywamy *wzajemnie jednoznaczną*.
Zatem

3. *Inwolucja jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.*

4. *Jeżeli zbiory X_1 i X_2 są rozłączne, g_1 jest inwolucją na X_1, g_2 jest inwolucją na X_2, to*

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{gdy } x \in X_1, \\ g_2(x) & \text{gdy } x \in X_2 \end{cases}$$

jest inwolucją na $X_1 \cup X_2$.

Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego x istnieje takie i $(i = 1, 2)$, że $g(g(x)) = g_i(g_i(x)) = x$.
A teraz inne określenie inwolucji:

5. *Funkcja f jest inwolucją na X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie zbiory A, B, C i taka funkcja h, że*

$$A \cup B \cup C = X,$$
$$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset,$$

h jest funkcją wzajemnie jednoznaczną o dziedzinie A i zbiorze wartości B

oraz

$$(^*) \qquad f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{gdy } x \in A \\ h^{-1}(x) & \text{gdy } x \in B \\ x & \text{gdy } x \in C \end{cases}$$

Sprawdzenie twierdzenia **5** wygląda następująco:
Jeśli istnieją odpowiednie zbiory A, B, C i funkcja h, to mamy
gdy $x \in A$

$$f(f(x)) = f(h(x)) = h^{-1}(h(x)) = x,$$

gdy $x \in B$

$$f(f(x)) = f(h^{-1}(x)) = h(h^{-1}(x)) = x,$$

gdy $x \in C$

$$f(f(x)) = f(x) = x.$$

Jeśli z kolei mamy daną inwolucję f, to najpierw znajdujemy zbiór C:

$$C := \{x \in X \colon f(x) = x\}.$$

Następnie zbiór $X—C$ ustawiamy w pary $\langle a, b\rangle$ spełniające dwa warunki

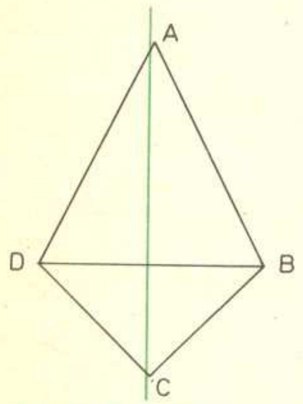
(1) $\qquad f(a) = b$

(2) każdy z elementów zbioru $X—C$ występuje w dokładnie jednej parze (obojętnie na którym miejscu).

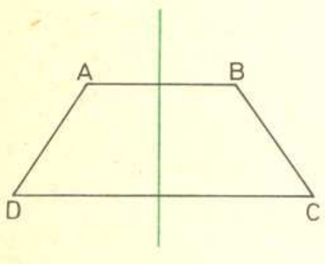
Jako A bierzemy zbiór wszystkich pierwszych elementów utworzonych par, jako B — zbiór wszystkich drugich elementów. Funkcję h definiujemy jako

$$h = f|_A.$$

Rozwiązanie zadania M 124
Możliwe są dwa przypadki:
1° na osi symetrii leży co najmniej jeden wierzchołek czworokąta, 2° na osi symetrii nie leży żaden wierzchołek czworokąta.
W pierwszym przypadku na osi symetrii leżą dokładnie dwa wierzchołki czworokąta, który wobec tego jest deltoidem.
$AB = AD$, $DC = BC$, skąd $AD + BC = AB + DC$, a więc w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



W drugim przypadku czworokąt jest trapezem równoramiennym. Mamy wtedy $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$, wobec czego czworokąt można wpisać w okrąg.



h^{-1} oznacza funkcję odwrotną do h.

W tym miejscu (oraz w dowodzie twierdzenia 7) korzystamy z pewnika wyboru — patrz artykuł K. Wiśniewskiego, Delta 3/1977.

$f|_A$ oznacza funkcję f ograniczoną do zbioru A.

Rozwiązanie zadania M 125

Z założenia wiemy, że

(1) $f(a,b,c) \leqslant f(b,a,c)$,

(2) $f(b,a,c) \leqslant f(b,c,a)$,

skąd wynika

(3) $f(a,b,c) \leqslant f(b,c,a)$.

Stosując kolejno (1), (3), (3), (1), (3), (3) otrzymujemy $f(x_1,x_2,x_3) \leqslant f(x_2,x_1,x_3) \leqslant f(x_1,x_3,x_2) \leqslant f(x_3,x_2,x_1) \leqslant f(x_2,x_3,x_1) \leqslant f(x_3,x_1,x_2) \leqslant f(x_1,x_2,x_3)$.

Ponieważ pierwsze i ostatnie wyrażenie w tym ciągu nierówności są równe, więc wszystkie wyrażenia są równe, c.n.d.

Na mocy warunku (2) zbiory A i B są rozłączne. Ponieważ $A \cup B = X - C$, więc są oba rozłączne ze zbiorem C. Wreszcie warunek (1) gwarantuje, że

$$h(A) = B,$$

a więc także

$$h^{-1}(B) = h^{-1}(h(A)) = h^{-1}h(A) = A.$$

Złożenie dwóch inwolucji może inwolucją być, a może też nie być inwolucją. Np. jeśli f_1, f_2 to funkcje wprowadzone wyżej, a $f_3(x) = -x$, to f_1f_2 nie jest inwolucją, zaś f_3f_2 jest inwolucją — proszę sprawdzić.

Ogólnie

6. *Jeśli h_1, h_2 są inwolucjami na X, to h_2h_1 jest inwolucją na X wtedy i tylko wtedy, gdy $h_2h_1 = h_1h_2$.*

Istotnie, jeśli h_1h_2 i h_2h_1 są inwolucjami, to

$$h_2h_1h_2 = h_2h_1h_2I = (h_2h_1h_2)(h_2h_1)(h_2h_1) = \\ = (h_2(h_1(h_2h_2)h_1)h_2)h_1 = h_1,$$

a więc

$$h_1h_2 = (h_2h_1h_2)h_2 = h_2h_1(h_2h_2) = h_2h_1.$$

Jeśli z kolei h_1 i h_2 są inwolucjami oraz $h_2h_1 = h_1h_2$, to

$$(h_2h_1)(h_2h_1) = (h_2h_1)(h_1h_2) = (h_2(h_1h_1)h_2) = I.$$

Przegląd własności inwolucji zakończymy twierdzeniem

Jest to twierdzenie udowodnione specjalnie dla Delty. W literaturze można znaleźć analogiczny wynik tylko przy dodatkowym założeniu, że X jest zbiorem skończonym.

7. *Dla dowolnej wzajemnie jednoznacznej funkcji f zbioru X na X istnieją takie inwolucje g i h na X, że $f = hg$.*

Dowód (nieco trudniejszy od dotychczasowych):

Określamy indukcyjnie ciąg funkcji $k^{(i)}$:

$$k^{(0)} = I_X,$$
$$k^{(i+1)} = fk^{(i)},$$

oraz przyjmujemy umowę

$$k^{(-i)} = (k^{(i)})^{-1}.$$

Weźmy pod uwagę relację $\sim$ na elementach zbioru X:

$a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita n, taka, że $k^{(n)}(a) = b$.

Jak łatwo sprawdzić $\sim$ jest relacją równoważności.

Jej klasy abstrakcji to zbiory

$$D_a = \{k^{(n)}(a)\colon n \textit{ jest liczbą całkowitą}\},$$

gdzie a jest dowolnie ustalonym elementem X.

Określimy funkcje g i h oddzielnie na każdym ze zbiorów D_a — można tak zrobić z uwagi na twierdzenie **4** (uogólnione oczywiście). Zauważmy najpierw, że

$$x \in D_a \to f(x) \in D_a,$$

a dokładniej

$$f(k^{(n)}(a)) = k^{(n+1)}(a).$$

Mamy więc zastąpić dwiema inwolucjami funkcję, która każdemu $k^{(n)}(a)$ przyporządkowuje $k^{(n+1)}(a)$.

Będą to funkcje g_a i h_a określone przez warunki:

$$g_a(k^{(n)}(a)) = k^{(-n)}(a),$$
$$h_a(k^{(n)}(a)) = k^{(1-n)}(a).$$

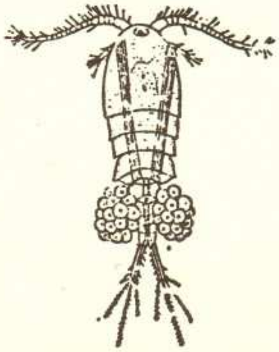
Mamy

$$h_ag_a(k^{(n)}(a)) = h_a(k^{(-n)}(a)) = k^{(1-(-n))}(a) = \\ = k^{(n+1)}(a) = f(k^{(n)}(a)).$$

Pozostaje jeszcze sprawdzić, że g_a i h_a są inwolucjami na D_a:

$$g_ag_a(k^{(i)}(a)) = g_a(k^{(-i)}(a)) = k^{(-(-i))}(a) = k^{(i)}(a),$$
$$h_ah_a(k^{(i)}(a)) = h_a(k^{(1-i)}(a)) = k^{(1-(1-i))}(a) = k^{(i)}(a).$$

I w ten sposób dowód został zakończony.



Rozwiązanie zadania M 126

Niech $n > 2$. Zauważmy, że jeżeli k i n są liczbami względnie pierwszymi (tzn. największy wspólny dzielnik liczb k i n jest równy 1) oraz $1 \leqslant k \leqslant n$, to liczby $n-k$ i n są względnie pierwsze i $1 \leqslant n-k \leqslant n$. Gdyby bowiem d było wspólnym dzielnikiem liczb $n-k$ i n, to d byłoby dzielnikiem różnicy tych liczb, tj. liczby k, a więc d byłoby wspólnym dzielnikiem liczb k i n, a jedynym wspólnym dzielnikiem tych liczb jest 1, musi więc być $d = 1$.

Oczywiście zachodzą nierówności $0 \leqslant n-k \leqslant n$. Gdyby było $0 = n-k$, to $k = n$ i liczby k i n nie byłyby względnie pierwsze (bo $n > 1$).

Liczby względnie pierwsze z n i nie przekraczające n można więc pogrupować w pary $\{k, n-k\}$, gdyż nie jest możliwe, by $k = n-k$ (wówczas $n = 2k > 2$, $k > 1$, i liczby k i $n = 2k$ nie byłyby względnie pierwsze). Liczba $\varphi(n)$ jest więc (dla $n > 2$) parzysta.