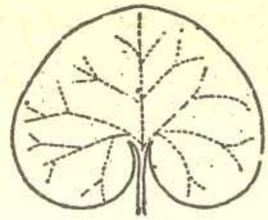
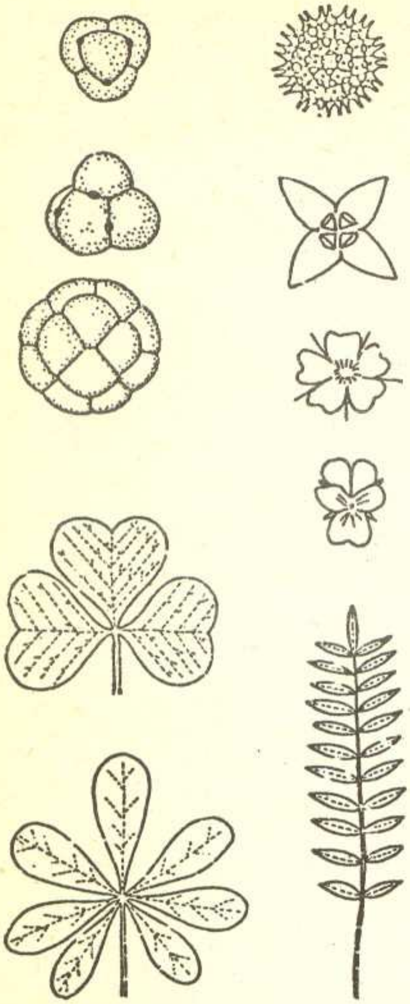
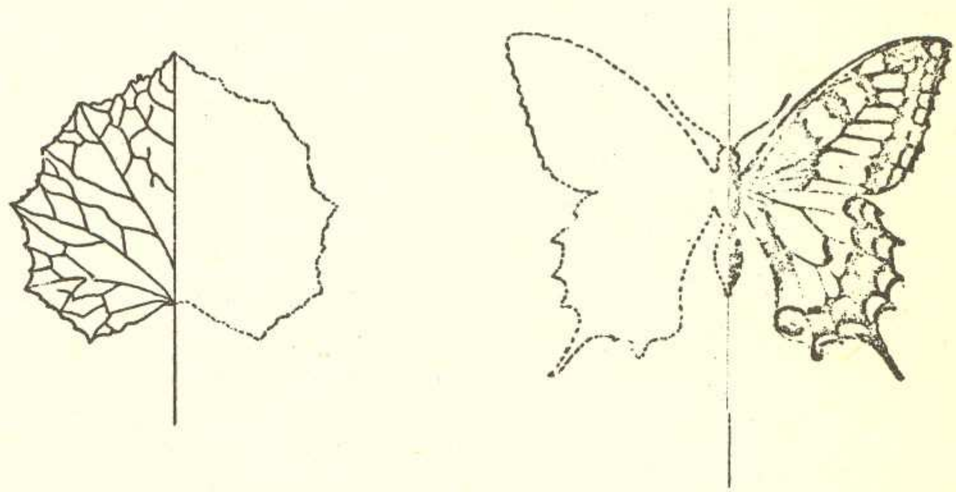




Z kolei popatrzmy na rośliny. Całe rośliny, lub ich części, wykazują na ogół symetrię, bardziej nawet zróżnicowaną niż u zwierząt. Wśród owoców, nasion i kwiatów znajdujemy przykłady pełnej symetrii sferycznej, symetrii osiowej trzykrotnej, czterokrotnej, pięciokrotnej, itd. Liście mają przeważnie symetrię dwuboczną. Nieliczne kwiaty i chyba tylko liść wiązu są istotnie niesymetryczne. Zauważmy także, że samotnie rosnące drzewa i krzewy formują się w przybliżeniu symetrycznie (o ile tylko nie działają na nie np. silne wiatry z jednego kierunku). Można zadać sobie pytanie dlaczego tak jest. Wykształcenie się u zwierząt jednakowych kończyn położonych symetrycznie po obu stronach ciała zapewnia regularność poruszania się zwierzęcia, jest wynikiem ewolucji. Ale dlaczego np. liście większości roślin są symetryczne? Można postawić hipotezę, że chodzi tu o oszczędność dziedzicznie przekazywanej informacji koniecznej do odtwarzania się danego gatunku. Do jednoznacznego określenia bryły geometrycznej o najwyższej symetrii — kuli — trzeba tylko podać jej promień (jedną liczbę!). Ze względów funkcjonalnych wszystkie twory żywe nie mogą oczywiście być kuliste, niemniej natura dąży w miarę możliwości do zredukowania potrzebnej informacji. Popatrzmy na ostatni rysunek. Mamy na nim przedstawione pół liścia i pół motyla (jak zresztą często spotyka się w książkach). Czy wystarczy nam to do zrekonstruowania całości? Wystarczy, ponieważ wiemy, że twory te są *symetryczne* i w myśli „dorysowujemy" drugą połowę.



Geometria zbudowana z symetrii

Dr Marek KORDOS

Termin „symetria" używany jest potocznie w różnych znaczeniach, co więcej, zakres tych znaczeń jest dla różnych ludzi różny. Najczęściej jednak myśli się o sytuacji, w której zamiana pewnych elementów miejscami nic nie zmieni.

W niektórych figurach można punkty połączyć w takie pary, że zamiana miejscami punktów w każdej parze nie zmienia figury. Jeśli jeszcze zażądać, aby ta zamiana była *automorfizmem*, to znaczy nie zmieniała żadnych zależności geometrycznych, to otrzyma się pojęcie symetrii używane w geometrii.

Ponieważ automorfizmy w geometrii euklidesowej to znane ze szkoły *podobieństwa*, więc ścisła definicja symetrii będzie następująca:

Funkcję φ, której argumentami i wartościami są wszystkie punkty przestrzeni, która spełnia dwa warunki: dla dowolnych punktów A, B, C, D

$$\text{jeśli } AB = CD, \quad \text{to} \quad \varphi(A)\varphi(B) = \varphi(C)\varphi(D),$$
$$\text{jeśli } \varphi(A) = B, \quad \text{to} \quad \varphi(B) = A,$$

i która nie jest tożsamością, nazywamy symetrią.

Pierwszy z podanych warunków można wysłowić:

$$\varphi \text{ jest podobieństwem,}$$

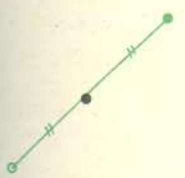
a drugi

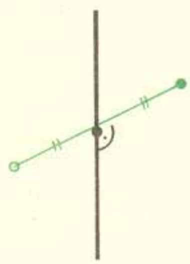
$$\varphi \text{ jest inwolucją.}$$

Można wykazać (polecamy to jako zadanie), że z definicji symetrii wynika, że jest ona *izometrią*, tzn. spełnia warunek

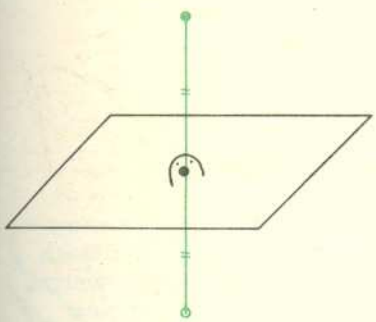
$$AB = \varphi(A)\varphi(B),$$

oraz, że ma co najmniej jeden punkt stały (jest nim środek odcinka $A\varphi(A)$). Co więcej, można wykazać, że w przestrzeni trójwymiarowej symetriami są tylko symetrie środkowe, osiowe i płaszczyznowe. W przestrzeni dwuwymiarowej, czyli na płaszczyźnie, symetriami są wyłącznie symetrie środkowe i osiowe. Dalej będzie mowa tylko o płaszczyźnie.





Na przełomie XIX i XX wieku matematyk duński Johannes Hjelmslev zauważył, że każde zdanie o symetriach środkowych i osiowych można interpretować jako zdanie o punktach i prostych — środkach i osiach tych symetrii. Idee te rozwinęli głównie matematycy niemieccy, Kurt Reidemeister, Arnold Schmidt, a w roku 1959 Friedrich Bachmann wydał monografię, w której o geometrii mówi się wyłącznie za pośrednictwem symetrii osiowych (Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff). Tak, wyłącznie symetrii osiowych, gdyż symetrie środkowe można za ich pomocą określić.



Dalej małe litery łacińskie oznaczać będą symetrie osiowe czyli proste. Przy tej umowie warunek

$$ab = ba \quad \text{i} \quad a \neq b$$

oznacza, że ab jest punktem. Istotnie — jest to złożenie dwu symetrii osiowych o osiach prostopadłych (dlaczego?), a więc symetria środkowa, czyli punkt. Oznacza to również, że $a \perp b$.

Jeśli ab jest punktem, to warunek

$$abc = cab \quad (\text{lub } abc = cba)$$

oznacza, że punkt ab leży na prostej c (dlaczego?), a dla dowolnych prostych a, b, c warunek

$$abc = cba$$

oznacza, że mają one wspólny punkt lub wspólną prostopadłą (to już trudniej uzasadnić, ale warto spróbować).

Bachmann podaje układ aksjomatów (warunków) wystarczających na to, aby na ich podstawie zbudować, wychodząc od pojęcia prostej (= symetrii osiowej), całą geometrię. Podamy tutaj ich treść, a nie formalny zapis:

Przez dowolne dwa punkty przechodzi prosta.

Dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Dwie proste mają wspólny punkt lub wspólną prostopadłą.

Trzy proste mające wspólny punkt lub wspólną prostopadłą można zastąpić jedną (co to znaczy?).

Istnieje prostokąt (jak to można by zapisać?).

Zauważmy ciekawą cechę tego sposobu uprawiania geometrii — można rachować na prostych (bo utożsamiamy je z symetriami, czyli funkcjami). W ten sposób Bachmann zrealizował postulat Leibniza, który 300 lat temu występował przeciwko wprowadzeniu przez Kartezjusza geometrii analitycznej twierdząc, że rachunek w geometrii jest rzeczą dopuszczalną jedynie wtedy, gdy rachuje się na obiektach geometrycznych, a nie na liczbach.