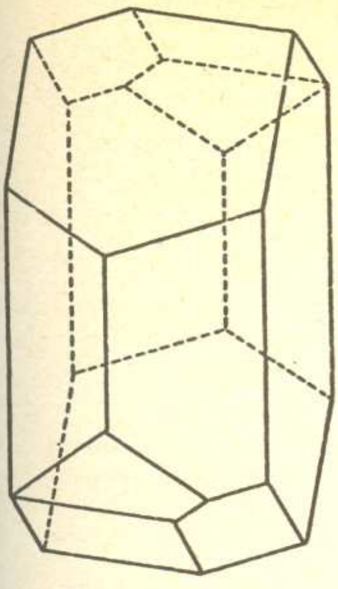
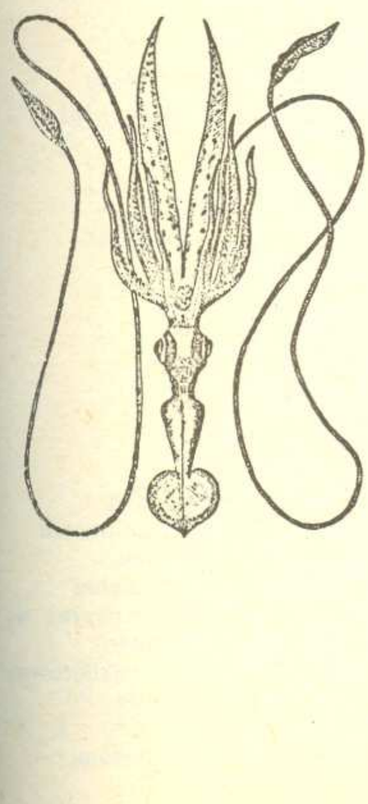


Anortyt $CaAl_2Si_2O_3$

Podstawowe znaczenie zachowuje jednak podział na układy oparty na własnościach symetrii sieci krystalicznej. Wewnętrzne symetrie kryształów znajdują bowiem odzwierciedlenie w ich makroskopowych własnościach fizycznych. Przy pomiarach mechanicznych, elektrycznych, czy też optycznych kryształy wykazują własności anizotropowe. Wielkość mierzona zależy od kierunku dokonywanego pomiaru i w pewnych określonych kierunkach przyjmuje wartości ekstremalne. Nietrudno domyślić się, że kierunki te pokrywają się z osiami symetrii sieci krystalicznej. Jedynie kryształy należące do układu regularnego wykazują własności izotropowe.
Matematycznie opisuje się tę sytuację wprowadzając tzw. tensory. Np. dla opisania polaryzowalności elektrycznej kryształu musimy w najogólniejszym przypadku podać dziewięć liczb. Liczby te są współczynnikami występującymi w trzech równaniach liniowych wiążących składowe wektora polaryzacji $\boldsymbol{P}$ ze składowymi wektora pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ i tworzą tzw. tensor polaryzowalności elektrycznej. Dla kryształów o wyższej symetrii niektóre z tych współczynników są równe, zatem ich efektywna liczba ulega zmniejszeniu. W granicznym przypadku kryształu należącego do układu regularnego tensor redukuje się do jednej stałej.
Rozpoczęliśmy ten artykuł od stwierdzenia, że morfologia kryształu określona jest przez formę jego elementarnej komórki. Do tego wniosku można dojść metodą prostej dedukcji i właściwie można sobie zadać pytanie, dlaczego starożytni filozofowie już dwa tysiące lat temu nie rozważali różnych postaci sieci krystalicznej i jej symetrii. Najwidoczniej po prostu nie zainteresowali się sprawą wyjaśnienia regularności kształtu kryształów...

Dualność

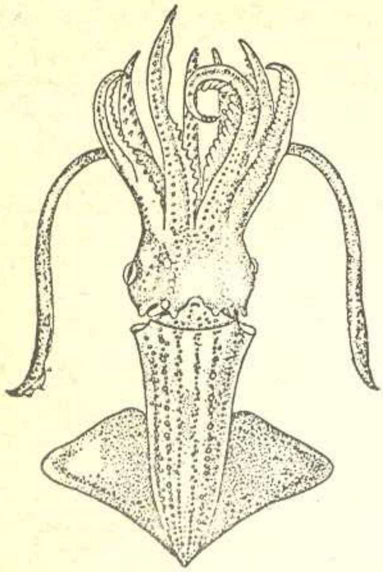
Dr Marek KORDOS



Weźmy pod uwagę teorię, w której mówi się o obiektach dwojakiego rodzaju — mamy więc w niej dwa rodzaje zmiennych, niech będą to małe litery łacińskie: $a, b, c, \ldots$ dla oznaczenia obiektów jednego rodzaju i duże: $A, B, C, \ldots$ dla oznaczenia obiektów drugiego. Niech nasza teoria mówi o pewnej relacji między obiektami różnych rodzajów — oznaczmy tę relację znakiem |.
Jeżeli chcemy napisać, że dwa obiekty są w naszej relacji, musimy umieścić oznaczające je litery obok kreski. Który po której stronie? Aby nie dyskryminować ani pierwszego, ani drugiego rodzaju obiektów umówmy się, że

napis $a \mid A$ znaczy to samo, co napis $A \mid a$.

Teorię o takiej, jak podaliśmy wyżej, budowie nazywamy autodualną, jeżeli spełnia ona warunek:
Zasada dualności (syntaktyczna):
Jeżeli w twierdzeniu teorii zamienimy wszystkie litery małe na duże (różne na różne) *i odwrotnie, to otrzymane zdanie będzie również twierdzeniem teorii.*
Tak więc teoria samodualna jest bardzo przyjemna — każdy dowód daje nam od razu dwa twierdzenia.
Modele teorii autodualnej, czyli struktury, jakie ta teoria opisuje, też mają zalety. Każdy model teorii o budowie opisanej na wstępie jest postaci $\langle \mathbf{u}, \mathbf{U}, | \rangle$, czyli składa się z dwóch zbiorów i relacji między elementami tych zbiorów.
Jeżeli teoria jest autodualna, to prawdziwe jest zdanie:
Zasada dualności (semantyczna):
Jeżeli struktura $\langle \mathbf{u}, \mathbf{U}, | \rangle$ jest modelem teorii, to również struktura $\langle \mathbf{U}, \mathbf{u}, | \rangle$ jest jej modelem.
A więc gdy znajdziemy jakiś model teorii autodualnej, „automatycznie" mamy i drugi.
Określenia „syntaktyczna" i „semantyczna" przy zasadach dualności podkreślały fakt, że za pierwszym razem mówiliśmy o napisach, a za drugim o ich znaczeniu.
No dobrze, ale czy w ogóle istnieją teorie autodualne i czy mają one jakieś znaczenie?



Podamy przykład takiej teorii podając jej aksjomaty:

Aks. 1. Dla dowolnych a i b istnieje A, takie, że $a, b \mid A$.

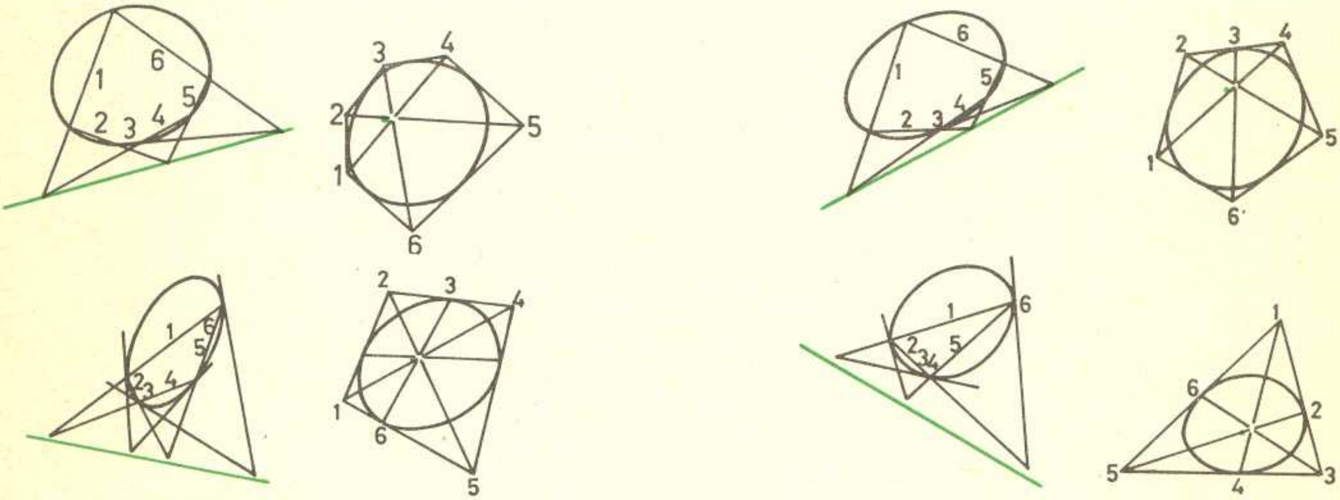
Aks. 2. Dla dowolnych A i B istnieje a, takie, że $A, B \mid a$,

Aks. 3. Jeśli $a, b \mid A, B$, to $a = b$ lub $A = B$.

Aks. 4. Istnieją takie a, b, c, d, A, B, C, D, że równocześnie zachodzi

$a, b \mid D$ i $b, c \mid C$ i $c, d \mid B$ i $d, a \mid A$
oraz nie zachodzi ani $a \mid B$, ani $a \mid C$, ani $b \mid A$,
ani $b \mid B$, ani $c \mid A$, ani $c \mid D$, ani $d \mid C$, ani $d \mid D$.

Teoria ta ma wiele modeli. Między innymi model jej można uzyskać z płaszczyzny euklidesowej, uzupełniając każdą prostą dodatkowym „punktem" — jej kierunkiem, oraz wprowadzając dodatkową „prostą" złożoną z samych kierunków. Wówczas jako **u** bierzemy zbiór wszystkich punktów (zwykłych i dodatkowych), jako **U** — zbiór wszystkich prostych (zwykłych i dodatkowej), a jako | — relację leżenia punktu na prostej. Teoria o podanej aksjomatyce nazywa się *geometrią rzutową* i jest uprawiana szeroko od XVII wieku (pierwszy podręcznik w 1822 roku — Poncelet). Ale czy jest autodualna? Aby się o tym przekonać wystarczy sprawdzić, że zamiana liter małych na duże i odwrotnie przeprowadzi nasz układ aksjomatów na siebie (1 na 2, 2 na 1, 3 na 3 i 4 na 4 — to ostatnie tylko nie jest widoczne na pierwszy rzut oka). A więc i cała teoria, jako zbiór konsekwencji tego układu aksjomatów, nie zmieni się.
A jak wygląda model dualny do opisanego?



Przedstawione cztery pary rysunków ilustrują wzajemnie dualne twierdzenia Pascala i Brianchona.

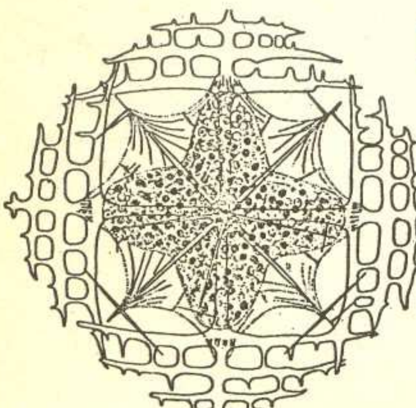
<table>
<tr><td>Boki</td><td rowspan="2">sześciokąta</td><td>wpisanego w elipsę</td><td rowspan="2">mają tę własność, że</td><td>ich punkty przecięcia leżą na jednej prostej</td></tr>
<tr><td>Wierzchołki</td><td>opisanego na elipsie</td><td>łączące je proste przechodzą przez jeden punkt</td></tr>
</table>

Sytuację tę ilustruje pierwsza para rysunków.

Na następnych rysunkach mamy przedstawione sytuacje zdegenerowane, kiedy pewne sąsiednie

<table>
<tr><td>wierzchołki</td><td rowspan="2">sześciokąta</td><td>wpisanego pokryły się</td><td rowspan="2">a</td><td>łączące je boki</td><td rowspan="2">stały się</td><td>stycznymi do</td><td rowspan="2">elipsy.</td></tr>
<tr><td>boki</td><td>opisanego leżą na jednej prostej,</td><td>ich wspólne końce</td><td>punktami</td></tr>
</table>

Twierdzenia pozostają w mocy również dla paraboli i hiperboli.



Przekształcenia zwane symetriami

Dr Ludomir WŁODARSKI

Słowo „symetria" w mowie potocznej używane bywa w najróżniejszych kontekstach. Mówi się np. o symetrii w obrazie, o symetrii w budowie utworu muzycznego, o symetrii we wzajemnych stosunkach między państwami. Takie użycie tego słowa jest uzasadnione, gdyż w dosłownym tłumaczeniu „symetria" znaczy tyle co „współmierność". W geometrii symetriami nazywa się pewnego rodzaju przekształcenia. Przyjrzyjmy się symetriom w geometrii. Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną figurą na płaszczyźnie lub w przestrzeni euklidesowej (figurą nazywamy każdy zbiór punktów). Wśród wszystkich wzajemnie jednoznacznych przekształceń figury $\mathcal{F}$ na siebie wyróżniamy *izometrie*, czyli takie przekształcenia, które nie zmieniają odległości między punktami.