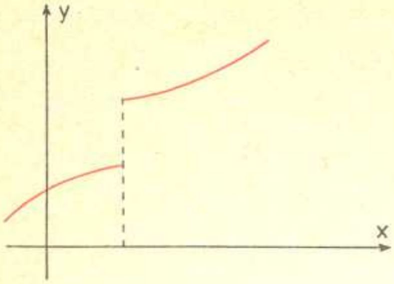


Dochodzi do momentu, kiedy pojęcie sieci Bravais dla scharakteryzowania ruchu molekuł traci sens: molekuły uzyskują swobodę poruszania się po całym rejonie wypełnianym pierwotnie przez kryształ. Mówimy wówczas, że kryształ uległ stopieniu. Widzimy więc, że ta skokowa przemiana, jaką jest topnienie, polega na zmianie charakterystyk topologicznych ruchu poszczególnych molekuł, ilościowych skoków tu nie ma.

Celem sprostowania nieporozumień, jakie narosły wokół teorii Thoma, podkreślam: w teorii tej nie ma miejsca na nieciągłości takie, jak na rysunku obok. W grę wchodzą tam wyłącznie nieciągłości własności jakościowych. Zwróćmy uwagę, że wyrażenie u^3+tu, w którym obecna jest nieciągłość polegająca na skokowej przemianie typów topologicznych, pod względem zależności od parametrów u, t jest wzorowym przykładem „porządnej" funkcji w sensie jej „zwykłej" ciągłości, różniczkowalności etc. Tylko takimi funkcjami i odwzorowaniami operuje teoria Thoma.

Z opisanego wyżej przykładu wynika jeszcze inny morał. Można wyobrazić sobie fizyka, który będzie starał się wyjaśnić opisane zjawisko wysuwając hipotezy o zmieniającym się charakterze sił napięcia powierzchniowego przy malejącej grubości błony, można sobie wyobrazić, jak będzie on budował coraz bardziej skomplikowane modele na poziomie molekularnym.

Otóż Thom wskazuje, że być może taki właśnie błąd popełniają współcześni biologowie urzeczeni postępami biochemii i biologii molekularnej, którzy podświadomie uwierzyli, że na molekularnym poziomie znajdą wyjaśnienie „tajemnicy życia". Wiele wskazuje na to, że szereg zjawisk fizjologicznych znajdzie swoje wyjaśnienie w globalnych własnościach żywego organizmu, nawet bez potrzeby odwoływania się do poziomu komórkowego, tak jak opisane przez nas zjawisko znajduje wyjaśnienie w globalnej geometrii układu.

Kosmologia geometryczna, czyli ewoluująca geometria

Dr hab. Bronisław KUCHOWICZ

Gdybym miał wymienić jedną tylko, ale za to najbardziej fundamentalną (moim zdaniem) właściwość Wszechświata, nie miałbym wątpliwości i bez wahania wymieniłbym jego ekspansję. Czyż nie jest bowiem czymś niezwykle uderzającym owo nieustanne rozszerzanie się Wszechświata?

Jest to fakt. Nauka jednak — to nie tylko zbiór faktów. Niezbędna jest choć próba ich wyjaśnienia, powiązania ze sobą. Dziś u podstaw wyjaśnienia faktów kosmologicznych tkwi ogólna teoria względności Einsteina — współczesna teoria czasoprzestrzeni. Już od z górą pół wieku trwają próby zastosowania tej skądinąd niezwykle owocnej teorii do Wszechświata jako całości. Próby takie podejmował sam Einstein, podejmowali (i podejmują do dziś, uogólniając teorię) inni, tworząc modele Wszechświata.

Wspominaliśmy już w pierwszym artykule z cyklu kosmologicznego, że modele kosmologiczne są to konstrukcje teoretyczne opisujące zachowanie się Wszechświata jako całości. Modele takie dopasowuje się do istniejących danych obserwacyjnych. Uznanie takich faktów, jak np. ekspansja kosmiczna albo obecność promieniowania szczątkowego (o których była mowa w numerach Delty 8/1976 i 10/1976), prowadzi do odrzucenia tych modeli, które nie przewidują ekspansji ani promieniowania tła. Tak więc odrzucony został pierwszy spośród modeli kosmologicznych opartych o ogólną teorię względności, zaproponowany przez samego Einsteina w 1917 roku model statycznego Wszechświata. Było to jeszcze na długo przed ogłoszeniem przez Hubble'a wyników jego badań nad odległymi galaktykami, przed stwierdzeniem ich powszechnej ucieczki. Wydawało się wtedy rzeczą naturalną przyjąć, że Wszechświat jako całość musi być niezmienny w czasie, statyczny. Mogą wprawdzie powstawać gwiazdy i układy planetarne (wystarczy wspomnieć o starej teorii Kanta-Laplace'a), zmieniać się mogą drobiazgi, ale porządek kosmiczny pozostaje trwały. Dlaczego bowiem miałby się zmieniać?

W latach 1922–1924, kiedy koncepcja statycznego, niezmiennego Wszechświata wydawała się czymś naturalnym, pojawiły się dwie prace młodego, nieznanego ani Einsteinowi, ani innym fizykom zachodnim matematyka z Leningradu, A. A. Friedmanna. Już w pierwszej z nich, zatytułowanej „O krzywiźnie przestrzeni", udało mu się uzyskać nieoczekiwany wynik, pozornie sprzeczny z całą nagromadzoną do tej pory wiedzą. Geometria Wszechświata (patrz artykuł Einsteina, Delta 2/1977) zmieniać się miała nieustannie z upływem czasu, zakrzywienie przestrzeni i gęstość materii stale miały maleć lub rosnąć, to samo odnosiłoby się do odległości wzajemnej dwóch punktów. Otrzymany przez Friedmanna model Wszechświata był modelem ewoluującym i stanowił wynik rozwiązania układu równań ogólnej teorii względności. Rozwiązania takiego nie znał poprzednio Einstein. Nic więc dziwnego, że po przeczytaniu pracy Friedmanna posłał do redakcji list z uwagami krytycznymi, wskazującymi na to, że model Friedmanna wzbudza poważne wątpliwości i że praca najprawdopodobniej jest błędna. List ten redakcja wydrukowała.

Aleksander Aleksandrowicz Friedmann, ur. 17 VI 1888, zm. 15 IX 1925, w 1909 ukończył studia na uniwersytecie w Petersburgu (sekcja matematyki), gdzie najbardziej interesowała go meteorologia dynamiczna. Po studiach pracował jako matematyk w Instytucie Dróg i Mostów, Instytucie Górnictwa; po wybuchu Pierwszej Wojny Światowej zgłosił się jako ochotnik na front, gdzie służył w lotnictwie, wykorzystując wolny czas na pisanie rozpraw naukowych. Oto co pisał w liście z frontu: „Zajmuję się obecnie zagadnieniem wyznaczenia temperatury i ciśnienia, gdy dane są prędkości... Potem przystąpię do napisania, jeśli uznacie to za właściwe, dla „Geograficzeskiego Sbornika" niewielkiej notki o przyczynach powstawania i znikania turbulencji w atmosferze, choćby w najogólniejszej postaci matematycznej". Nie ma w tym nic dziwnego, jeśli wziąć pod uwagę, że pierwszą w swym życiu pracę naukową (poświęconą liczbom Bernoulliego) posłał Friedmann do druku w poważnym czasopiśmie (wśród którego redaktorów byli ludzie tej klasy, co Klein i Hilbert) jeszcze jako uczeń ostatniej klasy gimnazjalnej. Praca ta ukazała się w druku, gdy Friedmann ukończywszy gimnazjum ze złotym medalem wstępował na studia.

Po zakończeniu Pierwszej Wojny Światowej, jeszcze w latach wojny domowej, prowadził wykłady hydrodynamiki i analizy tensorowej na uniwersytecie w Leningradzie, wydał książki „Doświadczenia z hydrodynamiki cieczy ściśliwych" oraz „Świat jako przestrzeń i czas" i prace kosmologiczne, o których wspominaliśmy w tekście, wreszcie kierował Głównym Laboratorium Geofizycznym w Leningradzie. Niestety, w pełni sił zachorował i zmarł na tyfus.

Spowodowało to natychmiastową odpowwiedź Friedmanna Einsteinowi, gdy tylko czasopismo owo dotarło do Leningradu. Friedmann wyjaśnił szczegółowo swe stanowisko, Einstein wszystko sprawdził i ku swemu zdziwieniu doszedł do wniosku, że to Friedmann ma rację. W 1923 roku ukazała się odpowiedź Einsteina. Oto fragment: „Wyniki pana Friedmanna uważam za słuszne; rzucają one nowe światło na problem. Okazuje się, że równania pola dopuszczają dla struktury przestrzeni obok rozwiązań statycznych również i rozwiązania dynamiczne (tj. zmieniające się z czasem) o symetrii sferycznej".
Mimo tego odwołania, modele zaproponowane przez Friedmanna nie od razu przyjęły się w kosmologii. Było to jeszcze na parę lat przed odkryciem rozszerzania się Wszechświata — tego, co właśnie przewidywały modele Friedmanna. A więc — mogły one uchodzić za poprawne rozwiązania równań Einsteina, poprawne i nieprzydatne do niczego. Pojawiły się za wcześnie!
Od tej pory minęło ponad pół wieku, pojawiło się wiele dalszych modeli kosmologicznych, coraz bardziej złożonych matematycznie, uzyskiwanych z równań Einsteina przy coraz to ogólniejszych założeniach. Wszystkie one mogą nadawać się do opisu rzeczywistego Wszechświata, wciąż jednak najbardziej przydatnymi w praktyce okazują się modele Friedmanna. Jak dotąd, żadne dane obserwacyjne nie są w stanie wykluczyć ich stosowalności w kosmologii. Należy się więc tym modelom kilka słów w naszym artykule.

Zacznijmy od założeń, przy których modele te zostały wyprowadzone. Pierwsze — dość istotne (jak by się nam wydawało) założenie, to uznanie słuszności równań ogólnej teorii względności. Równania te wiążą geometrię czasoprzestrzeni z wypełniającą ją materią. Mówi się nieraz krótko: Rozkład mas w przestrzeni wyznacza jej strukturę geometryczną. Gdy teraz spojrzeć na ucieczkę galaktyk, to od razu stwierdzamy, że średnia gęstość materii we Wszechświecie nieustannie maleje. Czy nie musi to spowodować jakiejś ukierunkowanej zmiany geometrii?
W modelach Friedmanna przyjmuje się jednorodny rozkład mas i izotropową ekspansję Wszechświata, jako najprostsze możliwe założenia robocze dla otrzymania wyniku rachunkowego — geometrycznego modelu Wszechświata. Założenia te — to nic innego jak omawiana przez nas przed kilku miesiącami zasada kosmologiczna.
Można więc modele Friedmanna wyprowadzić z teorii Einsteina przy użyciu zasady kosmologicznej. Komu modele te wydają się zbyt prymitywne (bo niby dlaczego ekspansja ma być izotropowa?), może posłużyć się modelami ogólniejszymi. Dziś już dostępnych jest wiele innych modeli, różniących się szczegółami od modeli Friedmanna, nic jednak istotnie nowego wszystkie te uogólnienia nie wnoszą. Wszak muszą być one zgodne z wynikami obserwacji, te zaś dają pewną górną granicę anizotropii czy też niejednorodności dla Wszechświata. Wewnątrz zaś obserwacyjnie danych granic tych wielkości modele niejednorodne i nieizotropowe nie różnią się w sposób zasadniczy od modeli Friedmanna.

Do modeli Friedmanna dojść można nie tylko w einsteinowskiej, ale i w newtonowskiej teorii grawitacji. Posłużymy się tą ostatnią teorią dla elementarnego wyprowadzenia tzw. równania ekspansji, które formalnie ma taką samą postać w obu teoriach. Przyjmijmy najprostszy rodzaj ośrodka ciągłego wypełniającego Wszechświat: pył o gęstości ϱ. Ruch cząsteczek pyłu rozważamy w tzw. współporuszającym się (z tymi cząsteczkami) układzie współrzędnych. Zastosujmy wreszcie zasadę kosmologiczną do pewnej wyciętej we Wszechświecie kulki o promieniu R, zawierającej masę $M = \frac{4}{3}\pi R^3\varrho$. Wraz z całym Wszechświatem kulka ta będzie ekspandować izotropowo, gęstość w niej wciąż będzie jednorodna (choć oczywiście będzie się zmieniać w czasie). Rozważmy teraz energię maleńkiej masy $\mathrm{d}m$, umieszczonej na powierzchni kulki. Uczestniczy ona w tej ekspansji, zwiększając swą odległość R od środka kulki. Jej prędkością jest więc $v = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$, a energią kinetyczną $E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2$. Masa ta jest zarazem przyciągana przez kulkę, i jej potencjalna energia grawitacyjna wynosi

$$E_{pot} = -\frac{\mathrm{G}M\mathrm{d}m}{R} = -\frac{4}{3}\pi\mathrm{G}R^2\varrho\mathrm{d}m.$$

Przyjmijmy, że zachodzi zachowanie energii: $E_k + E_{pot} = $ constans. Oznaczmy wielkość stałą jako $-\frac{1}{2}\varepsilon c^2\,\mathrm{d}m$, wtedy po uproszczeniu przez $\mathrm{d}m$ zasada zachowania energii przybiera postać:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{4}{3}\pi\mathrm{G}R^2\varrho = -\frac{1}{2}\varepsilon c^2.$$

Jest to właśnie owo równanie ekspansji.

Gdy $\varepsilon > 0$, układ jest związany siłami grawitacyjnymi, gdy $\varepsilon < 0$ — nie jest związany. Równanie ekspansji, wyprowadzone przez nas dla teorii newtonowskiej, pozostaje w mocy dla ekspansji izotropowej w teorii Einsteina, gdzie jego rozwiązania dają modele Friedmanna dla Wszechświata wypełnionego materią pyłową (mogą być bowiem i inne wypełnienia dla modeli Friedmanna).

Rozwiązanie zadania M 122. Podstawiając $x = 1, 2, 3$ znajdujemy rozwiązanie $(x,y) = (3,11)$. Możemy więc zakładać w dalszych rozważaniach, że $x > 3$.
Zauważmy, że

$$1+x+x^2+x^3+x^4 = \left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{5}{8}x+\frac{55}{64}$$

i jednocześnie

$$1+x+x^2+x^3+x^4 = \left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(x+1)(x-3).$$

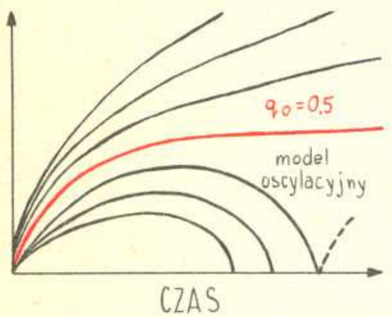
Jeżeli liczby naturalne x, y spełniałyby równość
$1+x+x^2+x^3+x^4 = y^2$,
to byłoby:

$$\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right)^2 < y^2 < \left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8} < y < x^2+\frac{x}{2}+\frac{4}{8},$$

co jest niemożliwe, gdyż liczba całkowita y leżałaby między kolejnymi ułamkami o mianowniku 8. Równanie nie ma więc rozwiązań, w których $x > 3$.

Rozwiązanie powyższego równania można łatwo uzyskać dla $\varepsilon = 0$. Podstawiamy wyrażenie wskazujące jak gęstość pyłu w kulce zależy od jej promienia: $\varrho = \varrho_0/R^3$, i mamy równanie różniczkowe dla funkcji $R = R(t)$. Rozwiązaniem jego jest: $R = (6\pi G\varrho_0 t^2)^{1/3}$ i $\varrho = \frac{1}{6\pi G t^2}$.
Promień kulki rośnie z czasem nieograniczenie, gęstość pyłu — spada. Można wykazać, że rozwiązanie to przedstawia model Wszechświata z geometrią euklidesową. Dla $\varepsilon < 0$ otrzymujemy również nieograniczone rozszerzanie — przy geometrii hiperbolicznej. Jeśli wreszcie $\varepsilon > 0$, wtedy możliwa jest sytuacja taka, iż w pewnej chwili $\frac{dR}{dt} = 0$, tzn. ekspansja kończy się, układ osiąga maksymalną wartość promienia R, a następnie zaczyna się faza kontrakcji $\left(\frac{dR}{dt} < 0\right)$.
Mówimy wtedy o modelu tzw. zamkniętego Wszechświata (model z $\varepsilon = 0$ nazywamy też modelem płaskim, model z $\varepsilon < 0$ — modelem otwartym). Przebieg zależności wielkości R od czasu dla trzech typów modeli Friedmanna widać na rysunku obok.
Funkcja $R(t)$, której przebieg przedstawiliśmy, charakteryzuje wzajemne odległości dwóch cząstek czy też punktów materialnych we Wszechświecie. Nazywa się ją nieraz czynnikiem skali, charakteryzuje ona bowiem skalę odległości. Zauważmy, że wszystkie wyobrażone przez nas modele zaczynają się w czasie od wartości $R(t) = 0$. Czy to możliwe, by w początkowej chwili ekspansji rozmiary Wszechświata były punktowe, a gęstość materii nieskończona? Czy nie załamałyby się wtedy zwykłe, znane nam prawa fizyki? Jest to istotny problem fizyki i kosmologii współczesnej, problem tzw. początkowej osobliwości (dla modelu zamkniętego osobliwość taka powstanie i pod koniec ewolucji). Do problemu tego powrócimy jeszcze w przyszłości, obecnie zauważymy jedynie, że pojawienie się osobliwości wskazuje na niestosowalność współczesnej teorii do stanów materii o dostatecznie wysokiej gęstości, kiedy być może dotychczasowe poglądy na strukturę materii i przestrzeni tracą moc.
Porównując wyniki obliczeń przeprowadzonych dla różnych modeli Friedmanna (otwarte, zamknięte i płaskie, wypełnione pyłem, promieniowaniem albo mieszaniną obu itd.) z obserwacjami ekspansji kosmicznej, usiłując dociec, czy ekspansja ta z upływem czasu ulega spowolnieniu czy też, na odwrót, przyspieszeniu, astronomowie przedstawiają argumenty na rzecz przyjęcia modeli o określonych parametrach. Sytuacja nie jest w pełni jasna do dziś, czy Wszechświat jest otwarty, zamknięty czy płaski. Znajdujemy się najprawdopodobniej w takim obszarze z lewej strony rysunku, na którym przedstawiono modele, że wszystkie krzywe $R = R(t)$ biegną zbyt blisko siebie, by można było ustalić na podstawie danych obserwacyjnych, według której z nich przebiega ewolucja Wszechświata i jego geometrii. A jeszcze ważniejszym jest tu pytanie odnoszące się do przyszłości: Czy Wszechświat będzie się rozszerzał bez końca, czy też grozi mu przejście kiedyś w fazę kontrakcji, zagęszczania. Mówimy „grozi", bo przy takim zagęszczaniu i Ziemia i Słońce kiedyś przestaną istnieć jako oddzielne ciała, i nawet jeśli nie dojdzie do stłoczenia całej materii Wszechświata do punktu (owej osobliwości, o której już mówiliśmy), to i tak materią zostanie z pewnością zagęszczona do pewnej niedużej objętości. Całe szczęście jednak, że gdyby nawet to nam groziło, to i tak już nas nie będzie; według oszacowań nawet najbardziej pesymistycznych nie mogłoby to nastąpić wcześniej niż za kilkadziesiąt miliardów lat!
Ekspansja Wszechświata stanowi naturalną konsekwencję równań Einsteina. Geometria Wszechświata zmienia się w czasie, a wraz z nią i gęstość materii. Ucieczka galaktyk prowadzi do wyjaśnienia paradoksu Olbersa. I to jeszcze nie wszystkie rezultaty wynikające z rozważań nad najprostszymi dynamicznymi modelami Wszechświata — modelami Friedmanna. Dalszymi konsekwencjami wypływającymi z tych modeli Wszechświata, odnoszącymi się do analizy stanu materii w odległych epokach, do odczytania zapisu procesów fizycznych, jakie wtedy zachodziły, zajmiemy się w następnych artykułach.



Różne modele friedmannowskie rozszerzającego się Wszechświata. Czynnik skali $R(t)$ w zależności od czasu t. Model scharakteryzowany wartością parametru deceleracji $q_0 = 0,5$ oddziela klasę modeli otwartych (ekspansja bez końca) od zamkniętych (dla których ekspansję zastępuje od pewnej chwili kontrakcja).

Dwuwymiarowe modele kosmologiczne. Przykłady Wszechświata zamkniętego (z krzywizną dodatnią) i otwartego (z krzywizną ujemną). We Wszechświecie zamkniętym promień świetlny może w zasadzie obejść całą przestrzeń i powrócić do punktu, z którego został wysłany; sytuacja taka jest nie do pomyślenia we Wszechświecie otwartym. Czy Wszechświat jest otwarty, czy zamknięty — zależy od ilości materii w nim. Jeśli gęstość materii jest dostatecznie duża, może ona doprowadzić w pewnej chwili do zatrzymania ekspansji, zamiany jej na kontrakcję.