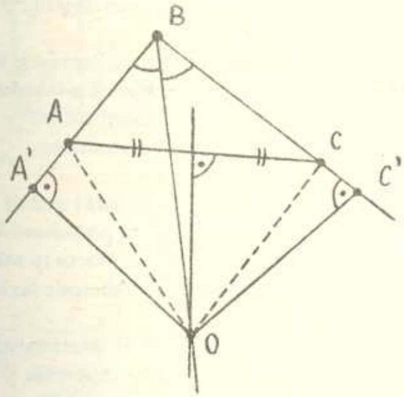
Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

Bieżąca seria zadań różni się od pozostałych. Treścią każdego zadania jest dowód jakiegoś twierdzenia. Waszym zadaniem, drodzy Czytelnicy, jest zbadanie poprawności tych dowodów.

M 118. Twierdzenie. Jeżeli relacja (dwuargumentowa) między elementami pewnego niepustego zbioru A jest przechodnia i symetryczna, to jest zwrotna.
Dowód. Przechodniość relacji R oznacza, że z aRb i bRc wynika aRc, symetria tej relacji oznacza, że z aRb wynika bRa $(a, b, c \in A)$. Przyjmując zatem, że aRb mamy bRa, z tych zaś dwóch warunków wynika na mocy przechodniości $(c = a)$, że aRa, a to oznacza zwrotność relacji.
Rozwiązanie na str. 17

M 119. Twierdzenie. Każdy trójkąt jest równoramienny.
Dowód. Weźmy pod uwagę trójkąt ABC. Jeśli $AB = BC$, to twierdzenie jest udowodnione.
Przypuśćmy z kolei, że $AB \neq BC$. Wówczas dwusieczna kąta $\sphericalangle ABC$ przecina symetralną boku AC w dokładnie jednym punkcie O.



Oznaczmy przez A' i C' rzuty prostokątne punktu O na przedłużenia boków AB i CB. Mamy wówczas

$$AO = CO$$

(bo O leży na symetralnej AC)

$$\text{i} \quad A'O = C'O$$

(bo O leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ABC$).
Wynika stąd, że

$$\triangle AA'O \equiv \triangle CC'O \quad \text{i} \quad \triangle BA'O \equiv \triangle BC'O,$$

a więc w szczególności

$$AA' = CC' \quad \text{i} \quad BA' = BC'.$$

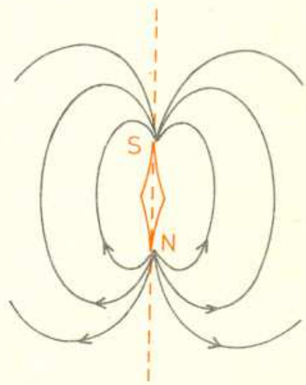
Zatem $AB = BA' - AA' = BC' - CC' = BC$

wbrew naszemu przypuszczeniu.
Rozwiązanie na str. 17

M 120. Twierdzenie. Istnieje taka liczba naturalna N, że dla $n > N$ równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z.
Dowód. Niech liczby naturalne x, y, z, n spełniają równość $x^n + y^n = z^n$. Oczywiście jest $x < z$, $y < z$, czyli $\frac{x}{z} < 1$, $\frac{y}{z} < 1$. Dzieląc obie strony równości przez z^n otrzymujemy $\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = 1$. Jeżeli n będzie dążyło do nieskończoności, to lewa strona ostatniej równości będzie dążyła do zera, prawa zaś będzie równa jedności — sprzeczność. Istnieje więc N, że dla $n > N$ równość $\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = 1$ jest niemożliwa.
Rozwiązanie na str. 17

Redaguje dr hab. Andrzej SZYMACHA

F 40. Jest rzeczą oczywistą, że jeżeli układ fizyczny znajduje się w stanie scharakteryzowanym jakąś symetrią (np. płaszczyzną symetrii), to bez ingerencji czynnika naruszającego tę symetrię ruch układu nie może być niesymetryczny. W związku z tym rozpatrzcie następujący problem:



Igła magnetyczna ma niewątpliwie (patrz rysunek) płaszczyznę symetrii σ. W płaszczyźnie tej równolegle do igiełki umieszczamy nieskończenie długi prostoliniowy przewodnik, co oczywiście nadal nie narusza symetrii układu. Wreszcie przez przewodnik przepuszczamy prąd elektryczny stały, co nadal nie narusza symetrii. Układ więc powinien pozostać w tej konfiguracji, tymczasem, jak wiemy z prawa Oersteda, igiełka wychyli się i ustawi swą osią N-S prostopadle do płaszczyzny σ. Gdzie tkwi błąd w rozumowaniu?
Rozwiązanie na str. 17