# Program Hilberta

## *Doc. dr hab. Lesław W. SZCZERBA*

### *Wir müssen wissen. Wir werden wissen*

### Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć

powiedział Dawid Hilbert na zakończenie swego wystąpienia z okazji nadania mu honorowego obywatelstwa jego rodzinnego miasta — Królewca. Słowa te zawierały jego matematyczne wyznanie wiary — Hilbert wierzył, że każdy problem matematyczny może być rozwiązany, jeśli tylko poświęci się mu dostatecznie wiele wysiłku.

Pojęcie problemu matematycznego rozumiał Hilbert (jak na owe czasy) dość specyficznie. Uważał on, że matematyka jest (a raczej powinna być — należy ją tak przebudować by była) systemem formalnym, kolekcją napisów wyrażających twierdzenia matematyki i ich formalne dowody. Postulat zbudowania owego systemu formalnego (na który Hilbert nałożył dodatkowe warunki, o których niżej) nazwano programem Hilberta.
W hilbertowskiej matematyce (matematyce formalnej) stwierdzenie, czy dany napis jest twierdzeniem, czy nie, ma wynikać z jego struktury, a nie z jego treści: nie z jego znaczenia. Oczywiście zajmujemy się przede wszystkim tymi zagadnieniami matematycznymi, które opisują jakiś aspekt rzeczywistości. Ale problemy: co to jest rzeczywistość i co to znaczy, że twierdzenie matematyki ją opisuje, do matematyki nie należą.
Uprawianie matematyki (formalnej) polega na wyciąganiu wniosków z przyjętych aksjomatów. Hilbert podał przykład teorii matematycznej zbudowanej w myśl jego zasad: w roku 1899 opublikował *Grundlagen der Geometrie* (Podstawy Geometrii) przedstawiające w sposób formalny i bezwzględnie ścisły geometrię euklidesową. Oto fragmenty recenzji Henri Poincarégo:
„Mając dany ciąg zdań stwierdza on, że wszystkie one wynikają z pierwszych. Uzasadnieniem tych pierwszych zdań, ich psychologicznym uzasadnieniem nie zajmuje się. Aksjomaty są założone...”. O Hilbercie krążyła anegdota, że gdy stwierdził, iż nic nie wie o naturze punktów, prostych i płaszczyzn, zapytano go:
— Czy w takim razie mogą to być odpowiednio stoły, krzesła i kufle piwa?
— Jeśli spełniają aksjomaty... — odpowiedział Hilbert.

Owe zapowiedziane dodatkowe warunki zawarte w programie Hilberta dotyczyły aksjomatyki. Miała ona być:
*zupełna*, a więc wystarczająca do udowodnienia każdego twierdzenia teorii,
*niezależna*, a więc by nie można było udowodnić żadnego z aksjomatów przy pomocy pozostałych,
i *niesprzeczna*, a więc by nie można było z aksjomatów udowodnić dwu zdań, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego.

Niesprzeczności aksjomatyki można dowodzić przy założeniu niesprzeczności innej teorii. Pierwszy taki dowód polegał na zbudowaniu modelu geometrii nieeuklidesowej. Gdyby zatem geometria nieeuklidesowa była sprzeczna, to tę sprzeczność można by przenieść do geometrii euklidesowej. Wymagania Hilberta szły dalej: żądał on absolutnego dowodu niesprzeczności. Podał nawet przykład takiego dowodu. Chodzi tu o dowód niesprzeczności teorii następnika.

# Teoria jednego obiektu

## *Mgr Krzysztof PRAŻMOWSKI*

Matematycy, posługując się ścisłym („sformalizowanym”) językiem, opisują schematy pewnych sytuacji. Na ile dokładnie mogą to uczynić? Jest to pytanie, które interesowało logików od dawna. Aby móc na nie odpowiedzieć, trzeba jednak wpierw uściślić używane przez nas pojęcia.
Uznajmy, że język matematyki, ów język zawierający tylko pewne znaczki, opisuje jakąś rzeczywistość, a tą rzeczywistością niechaj będą niepuste zbiory i relacje między elementami owych zbiorów. Takie „rzeczywistości” nazywać będziemy strukturami (elementy zbioru, na którym określone są relacje struktury, nazywamy elementami struktury lub indywiduami struktury) i mówić będziemy, że opis — zbiór zdań $\mathsf{T}$ z języka — jest prawdziwy w strukturze $\mathfrak{A}$ wtedy, gdy relacje w $\mathfrak{A}$ mają wszelkie własności postulowane przez $\mathsf{T}$, przy ustalonym rozumieniu nazw występujących w $\mathsf{T}$. Oznaczać to będziemy następująco: $\mathfrak{A} \models \mathsf{T}$. Możemy teraz zaprezentować pierwszą hipotezę:
**A.** *Istnieje taki zbiór zdań* $\mathsf{T}$, że jeśli $\mathfrak{A} \models \mathsf{T}$ oraz $\mathfrak{B} \models \mathsf{T}$, to $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.
Niestety sugestia ta upada — jest to nieprawda.
Wystarczy przypomnieć sobie dialog Hylasa i Filonousa (Lem — *Dialogi* — dialog I, dialog II, str. 40–42) na temat tożsamości osobniczej, by zrozumieć o co tu chodzi.
Niechaj $\mathfrak{A} \models \mathsf{T}$; niech $a$ będzie elementem $\mathfrak{A}$, zaś $b$ czymkolwiek, byle nie elementem $\mathfrak{A}$. Wymieńmy $a$ i $b$ w każdej relacji w $\mathfrak{A}$ i utwórzmy tak $\mathfrak{B}$ — oczywiście żadna ze strukturalnych własności $\mathfrak{A}$ nie ulegnie zmianie, skąd $\mathfrak{B} \models \mathsf{T}$. No — ale $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$.
Wydaje się, że sytuacja jest do uratowania kosztem pewnego zmniejszenia wymagań. Zdefiniujmy: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ jest izomorficzne z $\mathfrak{B}$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f$ wzajemnie jednoznaczna zbioru indywiduów $\mathfrak{A}$ na zbiór indywiduów $\mathfrak{B}$ taka, że $\mathfrak{B}$ powstaje z $\mathfrak{A}$ przez zastąpienie każdego elementu $a$ przez odpowiednie $f(a)$. A oto druga hipoteza:
**B.** *Istnieje zbiór zdań* $\mathsf{T}$ *taki, że jeśli* $\mathfrak{A} \models \mathsf{T}$ *oraz* $\mathfrak{B} \models \mathsf{T}$, *to* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
Tu sytuacja nie jest taka tragiczna: owszem, istnieją takie opisy, ale... tylko struktur skończonych. Mianowicie można dowieść, że gdy $\mathsf{T}$ ma powyższą własność, a $\mathfrak{A} \models \mathsf{T}$, to $\mathfrak{A}$ musi mieć skończoną ilość indywiduów. Prawdziwe jest bowiem
**Twierdzenie** [*o zwartości*]. Niech $\mathsf{T}$ będzie zbiorem zdań. Jeśli dla każdego skończonego podzbioru $X$ zbioru $\mathsf{T}$ istnieje struktura $\mathfrak{A}$ taka, że $\mathfrak{A} \models X$, to istnieje struktura $\mathfrak{A}$, gdzie $\mathfrak{A} \models \mathsf{T}$.

Oczywiście — cały czas mówimy o opisach formułowanych w tzw. języku elementarnym. To znaczy takiego typu, jak podany w Delcie 7/1975. Dla innych języków (patrz Delta 6/1974) nie musi tak być.
Zależy to również od przyjętych własności zbiorów, czyli od systemu teorii mnogości. W niektórych z nich (np. teoria semi-zbiorów) istnieją opisy postulowane w B — opisujące struktury nieskończone.

Teoria ta ma trzy symbole specyficzne $O$, $S$ i $=$. $S$ oznacza tu (intuicyjnie) operację następnika. O $Sx$ można myśleć jak o $x+1$. Poza tym występują tu symbole logiczne, a więc negacja $\sim$ i implikacja $\Rightarrow$. Nie ma zmiennych, a zatem nie ma i kwantyfikatorów. Aksjomatami teorii są zdania postaci

| | |
|---|---|
| **1.** $x = x$, | **4.** $(p \quad q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$, |
| **2.** $Sx = Sy \Rightarrow x = y$, | **5.** $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$, |
| **3.** $\sim(Sx = 0)$, | **6.** $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$. |

Liter $x$ i $y$ nie należy rozumieć tu jako zmiennych. Jak już wspomniano, zmiennych w teorii nie ma. Obie te litery oznaczają napisy postaci $SS \ldots SO$. Na przykład szczególnymi przypadkami aksjomatu **1** są $O = O$, $SO = SO$, $SSO = SSO$ i tak dalej. Litery $p$, $q$, $r$ oznaczają dowolne wyrażenia teorii.

Pokażemy teraz, że jeśli $x = y$ jest twierdzeniem naszej teorii, to po obu stronach znaku równości znajduje się ta sama ilość znaków. Gdyby bowiem było inaczej, to wśród wszystkich twierdzeń postaci $x = y$, gdzie w $x$ i $y$ są różne ilości znaków, byłoby takie, którego dowód jest najkrótszy. Niech to będzie na przykład zdanie $SO = O$. Zastanówmy się, jaki może być ostatni krok najkrótszego dowodu tego zdania. Nie może to być aksjomat typu **1**, bo wówczas po obu stronach równości w $SO = O$ byłoby ta sama ilość znaków. Nie może to być aksjomat typu **2**, bo wówczas zdanie $SSO = SO$ miałoby, wbrew założeniu, dowód krótszy od zdania $SO = O$. Nie może to być aksjomat typu **3**, bo zdanie $SO = O$ nie zaczyna się od negacji. Nie może to być aksjomat typu **4** ani **5**, bo $SO = O$ nie jest implikacją. Musi to więc być aksjomat **6**:

$$(\sim SO = O \Rightarrow SO = O) \Rightarrow SO = O.$$

Aby z tego aksjomatu wywnioskować $SO = O$, musieliśmy wcześniej udowodnić zdanie $\sim SO = O \Rightarrow SO = O$. Jak łatwo zauważyć, zdanie to może wynikać tylko z aksjomatu typu **5**:

$$SO = O \Rightarrow (\sim SO = O \Rightarrow SO = O).$$

Aby je jednak z tego aksjomatu udowodnić, musielibyśmy mieć udowodnione wcześniej zdanie $SO = O$, wbrew założeniu, że cały czas rozpatrujemy najkrótszy dowód tego właśnie zdania. Zatem istnieje zdanie $q$, którego nie można udowodnić z aksjomatów **1–6**. Gdyby jednak teoria oparta na tych aksjomatach była sprzeczna, moglibyśmy udowodnić pewne zdanie $p$ oraz jego negację, $\sim p$. Stąd, stosując aksjomat 5, otrzymalibyśmy łatwo $q$. W tej sytuacji teoria oparta na aksjomatach 1–6 nie może być sprzeczna.

A oto inny przykład absolutnego dowodu niesprzeczności. Teoria grup ma modele skończone. Istnienie takiego modelu (np. izometrii trójkąta równobocznego) dowodzi, że teoria grup jest niesprzeczna. Tego typu dowód nie da się jednak przeprowadzić dla teorii, która modeli skończonych nie ma (np. teoria liczb).

Właściwie nie widać było żadnego powodu, aby program Hilberta nie mógł być zrealizowany. Zaczęto więc intensywnie szukać odpowiednich aksjomatyk dla ważniejszych teorii matematycznych. Dla arytmetyki liczb naturalnych Giuseppe Peano podał następującą aksjomatykę:

| | |
|---|---|
| **1.** $\bigwedge x$ | $\sim Sx = 0$, |
| **2.** $\bigwedge xy$ | $Sx = Sy \Rightarrow x = y$, |
| **3.** $\bigwedge x \bigvee y$ | $\sim x = 0 \Rightarrow x = Sy$, |
| **4.** $(\bigwedge x\Phi(x) \Rightarrow \Phi(Sx)) \Rightarrow \bigwedge x\Phi(x)$. | |

Litera $\Phi$ oznacza tu dowolną formułę z jedną zmienną wolną. Napis **4** jest w związku z tym nie pojedynczym aksjomatem, lecz schematem aksjomatów (nazywa się go schematem indukcji).

A co to ma wspólnego z hipotezą **B**? Oto ze zwartości wynika:

**Twierdzenie.** Jeżeli istnieje struktura $\mathfrak{A}$ nieskończona taka, że $\mathfrak{A} \models \mathsf{T}$, to istnieje struktura $\mathfrak{Z}$, która ma moc wyższą niż $\mathfrak{A}$ oraz także spełnia $\mathsf{T}$.

Dowód. Niech $\mathfrak{A}$ ma moc $\varkappa$, niech $\lambda$ będzie większą liczbą kardynalną niż $\varkappa$. Niech dalej $(b_\mu)_{\mu<\lambda}$ będzie ciągiem różnych znaczków — nazw elementów stałych, których w $\mathsf{T}$ nie ma. Dopiszmy do $\mathsf{T}$ wszystkie zdania postaci

$$„b_\mu \neq b_{\mu'}”,$$

gdy tylko $\mu \neq \mu'$ oraz $\mu, \mu' < \lambda$, a powstały zbiór zdań nazwijmy $\mathsf{T}_0$. Oczywiście każdy skończony fragment $\mathsf{T}_0$ ma model, strukturę, która go spełnia. Przecież zawiera on jedynie skończenie wiele znaczków $b_\mu$. Wystarczy ze struktury $\mathfrak{A}$ wybrać — jakkolwiek — tyle samo elementów i ponazywać je owymi znaczkami. Stąd i $\mathsf{T}_0$ też ma model — powiedzmy $\mathfrak{Z}$. Ale — w szczególności — cały opis $\mathsf{T}$ jest tam prawdziwy, a nadto owe dodane zdania. Zatem w $\mathfrak{Z}$ musi być co najmniej $\lambda$ różnych elementów, oraz $\mathfrak{Z} \models \mathsf{T}$.

Widzimy teraz, że hipoteza **B** raczej upada. Jeśli tylko chcemy, by $\mathsf{T}$ opisywała pewną nieskończoną strukturę $\mathfrak{A}$, to będzie ona także opisywać strukturę $\mathfrak{Z}$ o większej mocy, a zatem $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{Z}$. Podobnymi metodami dowodzi się zresztą twierdzenia dużo silniejszego:

**Twierdzenie** [*Skolema-Löwenheima*]: Jeżeli teoria $\mathsf{T}$ ma model nieskończony, to ma model dowolnej nieskończonej mocy.

W ten sposób zawalił się program budowy „teorii jednego obiektu". Chodziło o to, by skonstruować teorię, która by jednoznacznie opisywała całą matematykę — tzn. teorię mnogości. Niestety — teoria mnogości, którą byśmy chcieli się posługiwać, musi mieć nieskończone modele, i z tej to (oprócz innych) przyczyny nie może opisywać ich tak dokładnie jak byśmy chcieli — czyli jednoznacznie.

Na koniec warto może wspomnieć o trzeciej hipotezie. Powiedzmy, że

> $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każde zdanie $\varphi$ jest prawdziwe w $\mathfrak{A}$ wówczas i jedynie wówczas, gdy jest prawdziwe w $\mathfrak{Z}$,

czyli nie istnieje własność rozróżniająca $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{Z}$ i dająca się sformułować w przyjętym języku.

**C.** *Istnieje teoria* $\mathsf{T}$ *taka, że* $\mathfrak{A} \models \mathsf{T}, \mathfrak{Z} \models \mathsf{T} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{Z}$

Teorie takie — nazywamy je zupełnymi — oczywiście istnieją i jest ich stosunkowo dużo: są takie, co mają modele skończone, jak i mające modele nieskończone. Jednym z najprostszych opisów jest następujący

$\{(\bigwedge x)(x \leqslant x)$, $(\bigwedge xy)(x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y)$,
$(\bigwedge xyz)(x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$,
$(\bigwedge xy)(\bigvee z)((x \neq y \wedge x \leqslant y) \Rightarrow (z \neq x \wedge z \neq y \wedge x \leqslant z \wedge z \leqslant y))$,
$(\bigwedge x)(\bigvee yz)(y \leqslant x \wedge x \leqslant z \wedge y \neq x \wedge x \neq z)$,
$(\bigwedge xy)(x \leqslant y \vee y \leqslant x)\}$.

Jego modelem jest np. porządek liczb rzeczywistych.

**Dla ciekawskich podajemy dowód twierdzenia o zwartości. Uprzedzamy jednak, że musimy przedtem wprowadzić sporo pomocniczych pojęć.**
**Jeśli $I \neq \emptyset$ jest zbiorem, a $F$ pewną rodziną niepustych podzbiorów zbioru $I$, to powiemy, że $F$ jest filtrem, jeśli:**

**a)** $A \in F$ i $B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$,
**b)** $A \in F$ i $A \subseteq B \Rightarrow B \in F$.

**Zauważmy, że jest intuicyjnie chyba uzasadnione mówić o elementach rodziny $F$ jako o zbiorach „dużych" (czy też — których uzupełnienie jest małe).**
**Jeśli $I$ jest płaszczyzną, to rodzina $F_0$ takich podzbiorów $A$ płaszczyzny $I$, że $I \setminus A$ ma miarę równą zeru tworzy filtr. Podobnie, gdy $F^*$ jest rodziną takich podzbiorów $B$ zbioru nieskończonego $I$, że $I \setminus B$ jest zbiorem skończonym, to $F^*$ także jest filtrem. (Nie należy jednak zbytnio sugerować się tą intuicją: rodzina $F_i$ podzbiorów $C$ zbioru $I$ takich, że $i \in C$ — także tworzy filtr.)**

Jest ona interesująca dla nas szczególnie z tego powodu, że właśnie ona stała się pierwszym argumentem dla wykazania nierealizowalności programu Hilberta. Trzeba było powrócić do odrzuconej przez Hilberta pesymistycznej opinii Emila Du Bois-Reymond:

## *Ignoramus et ignorabimus*
## Nie wiemy i nie będziemy wiedzieć.

Gdy tylko bowiem na szerszą skalę rozpoczęto prace nad zrealizowaniem programu Hilberta, matematyk wiedeński Kurt Gödel opublikował pracę, w której udowodnił, że nie można podać (spełniającej wymagania Hilberta) aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych. Wynikało z rezultatów Gödla również i to, że nie można podać absolutnego dowodu niesprzeczności dla aksjomatyki żadnej teorii zawierającej jako fragment aksjomatykę Peano. Co więcej, Gödel wykazał, że nie istnieje efektywna metoda sprawdzenia, czy dane zdanie można uzyskać z aksjomatyki Peano (por. artykuły A. Mostowskiego — Delta 10/74 i 11/74).
Wyniki Gödla wywołały całą lawinę prac na temat, które teorie są rozstrzygalne (tzn. dla których istnieje taka efektywna metoda), a które nie. Okazało się, że bardzo wiele teorii matematycznych to teorie nierozstrzygalne. Można nawet usłyszeć zdanie, że wszystkie interesujące teorie matematyczne są nierozstrzygalne. Ci którzy tak utrzymują uważają, że elementarna arytmetyka liczb rzeczywistych — to znaczy ten fragment arytmetyki liczb rzeczywistych, w którym mówi się tylko o liczbach a nie o zbiorach liczb — jest nieinteresująca. Rozstrzygalność tej teorii udowodnił A. Tarski w roku 1939. Podał on też jej aksjomatykę. Podobny wynik Tarski osiągnął dla elementarnej geometrii euklidesowej, teorii, w której mówi się o punktach lecz nie o zbiorach punktów. Jeśli bowiem dopuścimy, by używać w niej takich zwrotów jak „dowolna figura" — geometria stanie się nierozstrzygalna.

Rodzinę $V$ nazwiemy ultrafiltrem, gdy prócz tego, że jest filtrem, spełnia warunek:
c) dla każdego $A \subseteq I$ albo $A \in V$, albo $A' \in V$. (Przez $A'$ oznaczamy $I \setminus A$).
Przypuśćmy, że mamy rodzinę $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ struktur tego samego (to znaczy: o ustalonej (tej samej) liczbie relacji $n$-argumentowych dla każdej naturalnej liczby $n$; oznacza to też, że istnieje język, którym można opisywać wszystkie struktury $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$), a $V$ jest ultrafiltrem podzbiorów zbioru $I$.
Skonstruujemy tzw. ultraprodukt — oznaczany $P\mathfrak{A}_i / V$.
Najpierw jest nam potrzebny zwykły produkt — jego elementami będą funkcje dla każdego elementu $i \in I$ wybierające element z $\mathfrak{A}_i$.
Dalej — relacje między tymi funkcjami:
umawiamy się, że zachodzą one pomiędzy nimi, gdy dla odpowiednio dużej ilości struktur zachodzą one między wartościami funkcji.
Dokładniej:
$\langle f_1, \ldots, f_n \rangle \in R \Leftrightarrow \{i: \langle f_1(i), \ldots, f_n(i) \rangle$ jest w relacji $R$ w $\mathfrak{A}_i\} \in V$.
Jeśli określimy relację $\approx$ w następujący sposób: $f \approx g \Leftrightarrow \{i: f(i) = g(i)\} \in V$, to łatwo się przekonać, że jest to równoważność. A czym jest $P\mathfrak{A}_i / V$?
— to właśnie opisany wyżej zbiór funkcji z relacjami, podzielony przez $\approx$.
Ma on pewną bardzo ważną dla nas własność: niech $\varphi$ będzie zdaniem języka opisującego struktury $\mathfrak{A}_i$, wówczas

$$P\mathfrak{A}_i / V \models \varphi \Leftrightarrow \{i: \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in V$$

Możemy teraz dowieść twierdzenia.
Dowód: Określamy kolejno: $I := \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n : \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{T}\}$
$\varphi \in I \Rightarrow \mathfrak{A}_\varphi$ to taka struktura, że $\mathfrak{A}_\varphi \models \varphi$. Istnieje ona na mocy założenia.
$\varphi \in I \Rightarrow F_\varphi := \{\psi \in I: \mathfrak{A}_\psi \models \varphi\}$; $F_\varphi \neq \emptyset$, ponieważ $\varphi \in F_\varphi$.
$F := \{F_\varphi : \varphi \in I\}$.
Łatwo się przekonać, że $F$ ma własność **a)**
$F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_k} \in F \Rightarrow F_{\varphi_1} \cap \ldots \cap F_{\varphi_k} = \{\psi: \mathfrak{A}_\psi \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_\psi \models \varphi_k\} =$
$= F_{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k} \in F$
Określmy: $F' := \{X \subseteq I: \vee\, Y \in F (Y \subseteq X)\}$. $F'$ ma już własności **a)** i **b)**, czyli jest filtrem. Dowodzi się, że wtedy istnieje ultrafiltr $V$ zawierający $F'$, a zatem i $F$, bo $F \subseteq F'$.
A zatem — weźmy dowolne $\psi \in \mathrm{T}$, stąd $F_\psi \in V$,
$P\mathfrak{A}_\varphi / V \models \psi \Leftrightarrow \{\varphi \in I: \mathfrak{A}_\varphi \models \psi\} \in V$, skąd otrzymujemy wniosek:
$P\mathfrak{A}_\varphi / V \models \psi$. Ostatecznie więc $P\mathfrak{A}_\varphi \models \mathrm{T}$.

David Hilbert (ur. 1862 w Królewcu, zm. 1943 w Getyndze). Matematyk niemiecki działający na uniwersytecie w Getyndze. Zajmował się wieloma działami matematyki: algebrą i teorią liczb algebraicznych, gdzie sformułował wiele podstawowych twierdzeń; podstawami geometrii i podstawami matematyki, co doprowadziło go do sformułowania omawianego wyżej programu; rachunkiem wariacyjnym i teorią równań całkowych — dzięki tym badaniom możliwe się stało stworzenie analizy funkcjonalnej. Prowadził też badania z zakresu fizyki matematycznej.

Alfred Tarski, ur. 1901 w Warszawie, polski logik, matematyk i filozof. Do 1939 docent Uniwersytetu Warszawskiego, od 1942 profesor uniwersytetu w Berkeley (Kalifornia). Zajmuje się głównie logiką matematyczną, stworzył teorię modeli semantycznych, sformułował formalnie poprawną (niesprzeczną) definicję prawdy.

Kurt Gödel, ur. 1906, logik i matematyk austriacki. Do 1938 docent uniwersytetu w Wiedniu, od 1941 — w Princeton (USA). Uzyskał b. wiele cennych rezultatów z zakresu podstaw matematyki. Jednym z nich jest omawiane obok twierdzenie.

Emil Du Bois-Reymond, ur. 1818, zm. 1896, niemiecki filozof i fizjolog, profesor uniwersytetu w Berlinie, dokonał szeregu odkryć z zakresu fizjologii układu nerwowego i fizjologii mięśni. Jako filozof był agnostykiem: uważał, że istnieją nieprzekraczalne granice poznania rzeczywistości (stąd cytowana zasada); poza tymi granicami leżą sprawy takie, jak problem istoty materii czy istoty świadomości.