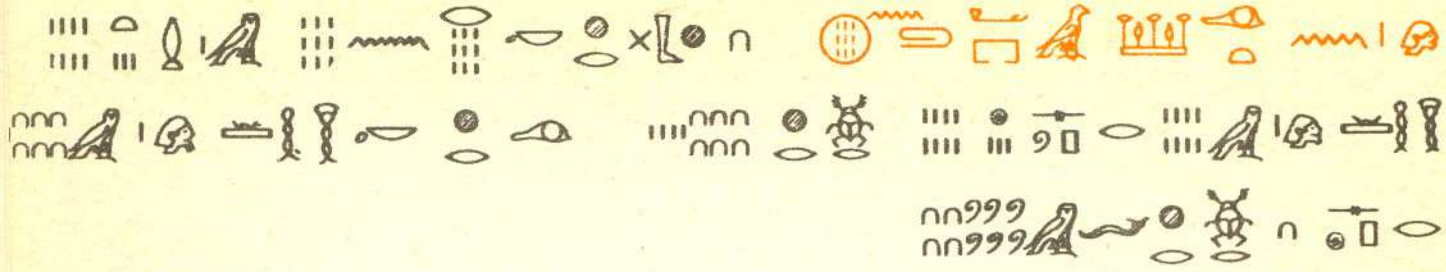

O rozwiązywaniu równań

Dr Maciej BRYŃSKI

Na lekcjach matematyki w szkole uczą nas, jak rozwiązywać równania liniowe, a więc postaci:

$$ax+b=0$$

i kwadratowe:

$$ax^2+bx+c=0,$$

gdzie $a \neq 0$.

W przypadku równań liniowych wzór na pierwiastek jest prosty: $x = \frac{b}{a}$; w przypadku równań kwadratowych we wzorach na pierwiastki oprócz symboli dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia występuje symbol pierwiastkowania. Same wzory nie są jednak zbyt skomplikowane i na ogół wszyscy dobrze pamiętamy postać tych wzorów. A równania wyższych stopni? Czy wzorów na pierwiastki tych równań nie ma w podręcznikach szkolnych tylko dlatego, że są one bardzo skomplikowane, czy też z innych powodów? I tak, i nie; zanim dokładnie wyjaśnimy tę sprawę, sięgnijmy trochę do historii.

O próbach rozwiązywania pewnych zagadnień, które sprowadzały się do równań liniowych lub kwadratowych, świadczą najstarsze zachowane teksty matematyczne (np. babilońskie tabliczki klinowe z ok. 1700 r. p.n.e., egipski papirus z ok. 1550 r. p.n.e. itp.). Nie było jednak wtedy mowy o ogólnych metodach rozwiązywania; każde równanie stanowiło osobny problem i właściwie inaczej było rozwiązywane.

Pewną systematyzację metod rozwiązywania równań kwadratowych przyniosły wieki średnie (tu warto wspomnieć o matematykach arabskich z X wieku n.e. uznawanych za prekursorów algebry). W dalszym jednak ciągu nie były to takie wzory, jakie mamy obecnie. Warto tu sobie uświadomić, że dopiero w wieku XVI zaczęto używać symboli literowych na oznaczenie liczb, co tak znacznie upraszcza zapis wyrażeń algebraicznych.

Sprawa równań wyższych stopni zaczęła wyjaśniać się poczynając od wieku XVI. Matematycy włoscy H. Cardano i L. Ferrari podają metodę rozwiązywania dowolnych równań stopnia trzeciego i czwartego. Metoda ta pozwala na wypisanie gotowych wzorów na pierwiastki równań; wzory te wyrażają pierwiastki przez współczynniki równania przy użyciu jedynie symboli czterech działań arytmetycznych oraz symboli pierwiastkowania (potrzebne jest wyciąganie pierwiastka kwadratowego oraz stopnia trzeciego). Wzory na pierwiastki równania stopnia trzeciego lub czwartego są jednak na tyle skomplikowane, że nie mają większego znaczenia praktycznego. Zamiast wyliczać pierwiastki za pomocą tych wzorów, z konieczności z pewnym przybliżeniem, praktyczniej jest stosować inne metody przybliżone. Tak więc wzory na pierwiastki równań stopnia trzeciego i czwartego mają jedynie walor teoretyczny.

W dalszym ciągu pozostawała jednak nie wyjaśniona sprawa równań wyższych stopni. Sprawa stawała się coraz bardziej intrygująca, bo z jednej strony pewne konkretne równania wyższych stopni można łatwo rozwiązać, z drugiej strony, jak głosi tzw. zasadnicze twierdzenie algebry, każdy wielomian o współczynnikach liczbowych ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych. Wszelkie próby znalezienia ogólnych wzorów na pierwiastki nie dawały jednak rezultatów. Sprecyzujmy tu, że przez wzory na pierwiastki wielomianu rozumiemy takie wzory, które wyrażają te pierwiastki przez współczynniki wielomianu za pomocą czterech działań arytmetycznych i operacji wyciągania pierwiastków dowolnych stopni (wyciąganie pierwiastków i działania arytmetyczne mogą być wielokrotnie powtarzane).

Nic też dziwnego, że nikt nie znalazł takich ogólnych wzorów na pierwiastki, bo wzory takie nie istnieją. Dokładniej mówiąc, dla każdej liczby $n > 5$ istnieje wielomian stopnia n, którego pierwiastki nie wyrażają się przez współczynniki tego wielomianu za pomocą czterech działań arytmetycznych i operacji wyciągania pierwiastka dowolnego stopnia. Przykładem takiego wielomianu jest x^5-4x-2.

Twierdzenie o nierozwiązalności równań algebraicznych stopni $\geqslant 5$ pochodzi z XIX stulecia i związane są z nim m.in. nazwiska takich matematyków, jak P. Ruffini, N. H. Abel, E. Galois. Prace tych i innych matematyków związane z problemem rozwiązalności równań dały zasadniczy impuls do powstania i rozwoju teorii grup i teorii ciał, kładąc w ten sposób fundament pod całą algebrę abstrakcyjną.