Pewnik wyboru

Dr Kazimierz WIŚNIEWSKI

Dziś o zbiorach uczą się młodzi ludzie już w przedszkolach. Nie zawsze jednak tak było. Nie tak dawno elementów *teorii mnogości* (taka jest tradycyjna nazwa nauki o zbiorach) uczono dopiero na studiach i to matematycznych. A jak było jeszcze dawniej? Nie możemy cofać się zbyt daleko w przeszłość, bo teoria ta jest dość młodą dziedziną matematyki. Od ukazania się pierwszych poświęconych teorii mnogości prac jej twórcy, Georga Cantora, upłynął zaledwie wiek, a nieco więcej od ukazania się prac innych matematyków na ten temat.

Nawet przez matematyków była ona przyjmowana różnie. Oddajmy głos świadkowi pewnego zdarzenia z początków naszego stulecia (R. Courant, *Wspomnienia z Getyngi*, Wiadom. Mat. 18(1974), 145–157): „Przypominam sobie, jak pewnego razu Henri Poincaré krótko przed swą śmiercią przybył do Getyngi dla wygłoszenia kilku bardzo interesujących odczytów na różne tematy. Jednym z nich było rozchodzenie się dokoła Ziemi fal elektromagnetycznych, innym — odczyt o podstawach matematyki. Był to gwałtowny atak na cantoryzm, na pewnik wyboru itd., przeciw twierdzeniu w rodzaju dobrego uporządkowania.

Właśnie wtedy Zermelo udowodnił, że każdy zbiór może być dobrze uporządkowany. Zermelo siedział w pierwszych rzędach, a Poincaré starał się być uprzejmym (a umiał być straszliwie nieuprzejmy, gdy starał się okazać przyjazny stosunek) i przemawiał. Och! Jak on grzmiał przeciw podejściu cantorowskiemu i rozwijaniu w matematyce tego kierunku. Powiedział: «Należy ukręcić łeb nawet najbardziej pomysłowemu dowodowi pana Zermelo i wyrzucić przez okno». Zermelo, pasjonat i dziwak, był zrozpaczony i wściekły. W czasie kolacji w tym samym dniu byłby zastrzelił Poincarégo, gdyby był zręczniejszy; był jednak wielkim niezgrabą". Wypowiedź ta oddaje ducha tamtych czasów. Zdania wybitnych matematyków były podzielone. Na powszechny szacunek teoria mnogości musiała zasłużyć swą użytecznością dla innych działów matematyki; stała się nawet nieodzowną bazą dla nowych dyscyplin matematycznych.

Po tym przydługim wstępie trzeba przystąpić do tematu. W artykule tym chciałbym opowiedzieć o najbardziej chyba kontrowersyjnym aksjomacie teorii mnogości — o *pewniku wyboru* (zob. artykuł A. Mostowskiego o dobrym uporządkowaniu w zeszycie 3 «Delty» z 1974 r). Jak pisałem we wstępie, wszyscy uczą się dziś teorii mnogości, a więc mogę zakładać, że Czytelnik zna podstawowe jej pojęcia: pojęcie zbioru i pojęcie funkcji. Niech R będzie rodziną zbiorów (tj. zbiorem, którego elementami są również zbiory). *Selektorem* rodziny R nazwiemy zbiór składający się z pewnych elementów zbiorów należących do rodziny R i mający z każdym z tych zbiorów po dokładnie jednym elemencie wspólnym. Przez Sel(R) oznaczymy zbiór wszystkich selektorów rodziny R.

Zob. *Kombinatoryka i boisko*, Delta 3/1976 r.

Z aksjomatów teorii mnogości (z wyjątkiem pewnika wyboru, do którego sformułowania zmierzam) można wywnioskować, że dla każdej rodziny R istnieje (dokładnie jeden) zbiór Sel(R).

Przykłady

1. Jeżeli $R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, to $\mathrm{Sel}(R) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$
2. $\mathrm{Sel}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
3. Jeżeli $\emptyset \in R$, to $\mathrm{Sel}(R) = \emptyset$.
4. Jeżeli $R = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, to $\mathrm{Sel}(R) = \emptyset$.

Po obejrzeniu powyższych przykładów i głębszym zastanowieniu się można przez analogię dojść do wniosku, że jeżeli tylko rodzina R składa się ze zbiorów rozłącznych i niepustych, to Sel(R) jest niepusty. Właśnie ten wniosek został przyjęty przez Ernsta Zermelo w 1904 r. jako pewnik wyboru. Poglądowo można go sformułować tak: z każdego zbioru rodziny składającej się ze zbiorów niepustych i rozłącznych można wybrać po jednym elemencie i utworzyć z nich zbiór.

To ostatnie sformułowanie tłumaczy nazwę pewnika. Z pewnika tego nieświadomie korzystał Cantor i inni jeszcze przed jego sformułowaniem. Jako pierwszy zwrócił uwagę na pewnik wyboru już w 1890 r. Giuseppe Peano w pracy poświęconej dowodowi istnienia rozwiązań układu równań różniczkowych.

Obyło się jednak bez przyjęcia tego aksjomatu, bo w tej konkretnej sytuacji udało się mu udowodnić istnienie selektora, a więc nie musiał zakładać aksjomatycznie jego istnienia. Beppo Levi w 1902 r. zauważył, że w dowodzie równoliczności zbioru wartości funkcji z pewnym podzbiorem jej dziedziny (zbioru określoności) trzeba powołać się na jakiś nowy aksjomat.

Samo sformułowanie pewnika wyboru niewiele o nim mówi. Żeby pokazać, jak on funkcjonuje, rozpatrzę przykłady. Pierwszym będzie dowód twierdzenia o równoliczności zbiorów, o których wyżej pisałem. Zakładam, że f jest funkcją odwzorowującą zbiór A na zbiór B. *Warstwą* funkcji f nazwiemy zbiór wszystkich tych elementów zbioru A, dla których wartość funkcji jest taka sama.

Oczywiście, warstwy są zbiorami niepustymi, a ponadto dwie różne warstwy są rozłączne. Niech R będzie rodziną wszystkich warstw funkcji f. Pewnik wyboru stwierdza, że $\mathrm{Sel}(R) \neq \emptyset$, a więc istnieje selektor W rodziny R. Niech $g(y)$ będzie (jedynym) elementem zbioru $W \cap \{x \in A : f(x) = y\}$ dla $y \in B$. Napisałem „jedynym", bo zbiór $\{x \in A : f(x) = y\}$ jest warstwą. Funkcja g jest określona na zbiorze B, a zbiór jej wartości jest zawarty w A. Ponadto g jest różnowartościowa. W ten sposób został zakończony dowód twierdzenia.

Zbiór B jest równoliczny ze zbiorem wartości funkcji g, a ten z kolei jest zawarty w zbiorze A.

Drugie zastosowanie pewnika wyboru będzie wykraczało poza teorię mnogości. Tym razem udowodnię pewne twierdzenie z początków analizy matematycznej. Jeżeli ktoś nie zna pojęć, o których będę mówił, niech się tym nie zraża. Wszystko, co będzie niezbędne, można bez trudu odczytać z tekstu dowodu.

Będziemy interesowali się funkcjami określonymi na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmującymi wartości rzeczywiste. Celem jest dowód twierdzenia: *Funkcja f jest ciągła w sensie Cauchy'ego w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła w sensie Heinego w punkcie x_0*. W artykule udowodnię tylko, że ciągłość w sensie Heinego pociąga za sobą ciągłość w sensie Cauchy'ego, gdyż w tej części dowodu korzysta się z pewnika wyboru. Dowód implikacji odwrotnej nie jest trudny i nie korzysta (lepiej byłoby powiedzieć: nie musi korzystać) z pewnika wyboru. Sądzę, że Czytelnik da sobie z nim radę.

Przystąpmy do dzieła. Założę, że funkcja f jest ciągła w sensie Heinego w punkcie x_0, tzn. że dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ warunek $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ pociąga za sobą warunek $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. W celu uzyskania sprzeczności założę, że funkcja f nie jest ciągła w sensie Cauchy'ego w punkcie x_0, tzn. zakładam że

$$\bigvee_{\varepsilon>0}\ \bigwedge_{\delta>0}\ \bigvee_{x}\ (|x-x_0| < \delta \wedge |f(x)-f(x_0)|) \geqslant \varepsilon).$$

Dla każdej liczby naturalnej n tworzę zbiór

$$A_n = \{\langle n, x\rangle : |x-x_0| < 1/n \wedge |f(x)-f(x_0)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Zbiór ten zgodnie z przyjętym założeniem (dla $\delta = 1/n$) jest niepusty. Niech R będzie rodziną złożoną ze wszystkich zbiorów A_n. Jeżeli $n \neq m$, to $A_n \cap A_m = \emptyset$, bo oba te zbiory składają się z par uporządkowanych, przy czym pary uporządkowane występujące w różnych zbiorach mają różne poprzedniki, a więc są różne. Zatem R jest rodziną zbiorów niepustych i rozłącznych. Pewnik wyboru stwierdza, że $\mathrm{Sel}(R) \neq \emptyset$. Niech W będzie selektorem rodziny R. Dla każdej liczby naturalnej n zbiór $A_n \cap W$ ma dokładnie jeden element będący parą uporządkowaną, której poprzednikiem jest liczba n, a następnikiem liczba rzeczywista, oznaczmy ją przez x_n, taka, że spełnione są warunki $|x_n - x_0| < 1/n$ oraz $|f(x_n)-f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Otrzymaliśmy zatem ciąg $\{x_n\}$ o następujących własnościach: $|x_n - x_0| < 1/n$ oraz $|f(x_n)-f(x_0)| \geqslant \varepsilon$ dla każdej liczby naturalnej n. Z pierwszego z tych warunków wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, zaś z drugiego, że $f(x_0)$ nie jest granicą ciągu $\{f(x_n)\}$. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność z przyjętym na wstępie założeniem, że funkcja f jest ciągła w sensie Heinego w punkcie x_0.

Udowodnione twierdzenie bardzo często bywa wykorzystywane przy badaniu ciągłości funkcji.

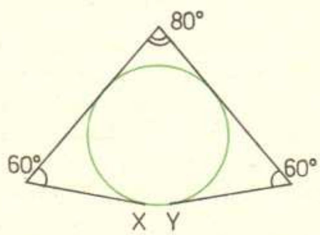
Szczegółową analizę wielu innych dowodów opartych na aksjomacie wyboru przeprowadził już w 1918 r. wielce zasłużony dla matematyki polskiej i światowej, jeden z twórców Warszawskiej Szkoły Matematycznej — Wacław Sierpiński. Był on jednym z założycieli i długoletnim redaktorem organu tej Szkoły, „*Fundamenta Mathematicae*", poświęconego teorii mnogości i jej zastosowaniom. Był on również autorem pierwszego w skali światowej podręcznika teorii mnogości wydanego w 1912 r. Pewnik wyboru był jednym z tematów, które pasjonowały Sierpińskiego niemal do końca życia. Jednym z najwybitniejszych w świecie badaczy pewnika wyboru był inny przedstawiciel tej Szkoły, zmarły niedawno prof. Andrzej Mostowski. Jest on autorem zdania: „Tylko żon nie trzeba wybierać, one są nam dane".
Do tej pory pisałem o pożytku płynącym z przyjęcia pewnika wyboru. Przysparza on również pewnych kłopotów. Otóż Stefan Banach i Alfred Tarski udowodnili, korzystając oczywiście z pewnika wyboru, że kulę można tak chytrze podzielić na skończoną liczbę części, że z nich można złożyć dwie kule identyczne z wyjściową. Taki paradoksalny wniosek (tzw. *paradoksalny rozkład kuli*) i inne skłaniały do przypuszczenia, że pewnik wyboru jest sprzeczny z pozostałymi pewnikami teorii mnogości. Przypuszczenia te zostały rozwiane w 1938 r. przez Kurta Gödla, co więcej w 1963 r. Paul J. Cohen udowodnił, że przyjęcie zaprzeczenia pewnika wyboru również nie prowadzi do sprzeczności z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości. Okazało się zatem, że pewnik wyboru jest niezależny (od pozostałych aksjomatów). Tak więc nasze rozumowanie przez analogię, prowadzące do sformułowania pewnika wyboru, niczym nie było usprawiedliwione. Powstaje zatem pytanie: przyjąć czy odrzucić pewnik wyboru? Argumentem za przyjęciem pewnika wyboru jest fakt, że wiele ważnych odkryć matematycznych nie zostałoby dokonanych bez niego. Nie można by na przykład było udowodnić twierdzeń, których dowody tu podałem. Oczywiście, nie tylko dlatego, że w ich dowodach korzystałem z pewnika wyboru, ale przede wszystkim dlatego, że pokazano nieistnienie dowodów tych twierdzeń bez opierania się na pewniku wyboru. Badaniami, o których pisałem pod koniec artykułu, zajmuje się specjalny i bardzo zaawansowany dział matematyki zwany podstawami teorii mnogości. Z tego względu ograniczyłem się tu tylko do podania pewnych wyników tego działu.

Rozwiązanie zadania M 117. Przypuśćmy, że liczb tej postaci jest liczba skończona i że $p_1, p_2, \ldots, p_n$ to są wszystkie takie liczby. Rozpatrzmy liczbę

$$N = 4p_1p_2\ldots p_n - 1.$$

Jest to liczba większa od jedności i ma wobec tego jakiś dzielnik pierwszy, oczywiście nieparzysty. Jest niemożliwe, by wszystkie takie dzielniki były postaci $4k+1$, gdyż iloczyn liczb tej postaci jest znowu liczbą tej postaci. Jeden z dzielników pierwszych liczby N jest więc postaci $4k+3$. Jest on różny od każdej z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gdyż przez te liczby dzieli się liczba $N+1$; gdyby i N była podzielna przez któreś p_i, to liczba $N+1-N = 1$ dzieliłaby się przez p_i, co jest niemożliwe. Wskazaliśmy więc liczbę pierwszą postaci $4k+3$ różną od każdej z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$, co przeczy założeniu, że były to wszystkie takie liczby.
Udowodnione twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia P. G. Lejeune Dirichleta (udowodnionego w roku 1837) orzekającego, że jeżeli a i b są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, to istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $ak+b$. Dowód tego twierdzenia jest jednak trudny.

Rozwiązanie zadania M 115. Dla $n = 3$ szukaną liczbą jest oczywiście 3. Załóżmy, że n-kąt wypukły ($n \geqslant 4$) ma x ostrych kątów wewnętrznych. Wiadomo, że suma miar wszystkich kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego równa jest $(n-2)\pi$, a każdy taki kąt ma miarę mniejszą od π. Byłoby więc $(n-2)\pi < x \cdot \frac{\pi}{2} + (n-x)\pi$, czyli $2n-4 < x+2n-2x$, skąd $x < 4$, czyli $x \leqslant 3$.



Rozpatrzmy teraz deltoid o kątach 60°, 80 60° i 160° (dla $n = 4$ szukana liczba jest więc też równa 3).
Można wpisać weń okrąg. Niech X i Y będą punktami styczności tego okręgu z bokami deltoidu wychodzącymi z wierzchołka kąta o mierze 160°. Obierając na krótszym z łuków XY n-5 punktów, otrzymujemy wraz z wierzchołkami przy kątach ostrych deltoidu wierzchołki n-kąta wypukłego o trzech kątach ostrych.

Rozwiązanie zadania F 39. W sytuacji statycznej warunek równości napięć liny po obu stronach bloczka jest postaci:

$$F = P + W - F,$$

gdzie F jest siłą, z jaką człowiek ciągnie linę w punkcie A.

Stąd: $$F = \frac{1}{2}(P+W).$$

Tyle wynosi napięcie liny zarówno w punkcie A jak i B. Oczywiście nacisk na oś C równa się $2F = P+W$.
Równania ruchu człowieka i mostka, gdy człowiek podciąga się ze stałym przyspieszeniem $\frac{g}{4}$ względem bloczka, są następujące:

$$F' + T = P + \frac{1}{4}P \quad \text{— człowiek,}$$

$$F' - T = W + \frac{1}{4}W \quad \text{— mostek.}$$

F' jest wartością siły z jaką człowiek oddziałuje na linę, a T wartością siły wzajemnego oddziaływania człowieka i mostka. Stąd:

$$F' = \frac{5}{8}(P+W).$$

Ponieważ lina jest nieważka, również napięcie liny w punkcie B wynosi F'. Natomiast nacisk na oś C równa się

$$2 \cdot F' = \frac{5}{4}(P+W).$$

Na koniec pytanie: czy ten sam wynik uzyskalibyśmy w przypadku podciągania mostka przez drugiego człowieka, nie stojącego na mostku?