Fizyka wspomaga geometrię

Zbigniew OGIELSKI

W momencie pisania artykułu autor był uczniem III kl. LO im. M. Konopnickiej w Inowrocławiu.

Matematyka jest nauką, która w rozwoju swoich metod z reguły nie korzysta z osiągnięć żadnych innych nauk. Niejednokrotnie jednak przy rozwiązywaniu zadań można skorzystać ze zdobyczy innych nauk, przez co rozwiązania można uprościć lub urozmaicić.

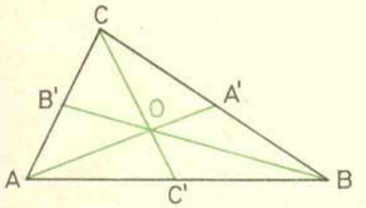
Na podstawie kilku przykładów pragnę pokazać, w jaki sposób można wykorzystać własności środka ciężkości do rozwiązywania zadań z geometrii.

W rozważaniach naszych będziemy korzystali ze znanego i łatwego do udowodnienia twierdzenia: „Jeżeli w danym układzie punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$ zastąpimy punkty $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ich środkiem ciężkości T nadając mu masę $m_1+m_2+\ldots+m_k$, to układ punktów $T, A_{k+1}, \ldots, A_n$ ma ten sam środek ciężkości, co układ dany".

Będziemy też korzystać z faktu, iż środkiem ciężkości dwóch punktów A i B o masach a i b jest taki punkt S odcinka AB, że $\dfrac{AS}{SB}=\dfrac{b}{a}$.

Wykorzystując własności środka ciężkości udowodnimy teraz kilka znanych twierdzeń o trójkącie, a także wyprowadzimy pewne wzory, mogące się przydać przy rozwiązywaniu zadań.

Zadanie 1. Udowodnić, że trzy dwusieczne kątów wewnętrznych w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.



Rozwiązanie. Niech w trójkącie ABC o bokach długości a, b, c:

dwusieczna $\sphericalangle A$ przecina bok o długości a w punkcie A',
dwusieczna $\sphericalangle B$ przecina bok o długości b w punkcie B',
dwusieczna $\sphericalangle C$ przecina bok o długości c w punkcie C'.

Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy a, b, c. Niech środkiem ciężkości układu punktów A, B, C będzie punkt O. Ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie mamy $\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{b}{a}$, więc punkt C' jest środkiem ciężkości mas a i b w punktach A i B.

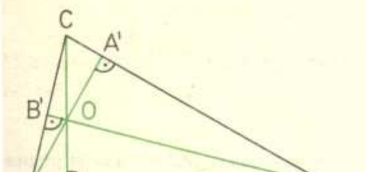
Zatem jeżeli w punkcie C' umieścimy masę $a+b$, to środek ciężkości punktów C' i C będzie się pokrywał z punktem O. Zatem punkt O należy do odcinka CC'. Analogicznie dowodzimy, że punkt O należy do odcinków AA' i BB'. Zatem odcinki AA', BB' i CC' przecinają się w punkcie O, c.n.d.

Obliczymy jeszcze w jakich stosunkach dzielą się dwusieczne kątów wewnętrznych w trójkącie. Jak udowodniliśmy wyżej, dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają się w punkcie O. Mamy więc obliczyć w jakich stosunkach punkt O dzieli dwusieczne AA', BB', CC'. Ponieważ punkt O jest środkiem ciężkości mas c i $a+b$ umieszczonych w punktach C i C' zatem:

$$\frac{CO}{OC'}=\frac{a+b}{c}$$

Analogicznie znajdujemy: $\dfrac{AO}{OA'}=\dfrac{b+c}{a}$ i $\dfrac{BO}{OB'}=\dfrac{a+c}{b}$

Zadanie 2. W jakim stosunku przecinają się wysokości w trójkącie ostrokątnym?



Rozwiązanie. Niech w trójkącie ABC odcinki AA', BB' i CC' będą wysokościami tego trójkąta. Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy $\operatorname{tg}\sphericalangle A$, $\operatorname{tg}\sphericalangle B$, $\operatorname{tg}\sphericalangle C$. Niech środkiem ciężkości układu punktów A, B, C będzie punkt O.

Ponieważ $\operatorname{tg}\sphericalangle A=\dfrac{CC'}{AC'}$ i $\operatorname{tg}\sphericalangle B=\dfrac{CC'}{C'B'}$ więc $\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{\operatorname{tg}\sphericalangle B}{\operatorname{tg}\sphericalangle A}$ zatem punkt C' jest środkiem ciężkości mas $\operatorname{tg}\sphericalangle A$ i $\operatorname{tg}\sphericalangle B$ w punktach A i B.

Umieśćmy zatem w punkcie C' masę $\operatorname{tg}\sphericalangle A+\operatorname{tg}\sphericalangle B$. Wtedy środek ciężkości punktów C i C' pokrywa się z punktem O. Zatem punkt O należy do odcinka CC'. Analogicznie dowodzimy, że punkt O należy do odcinków AA' i BB'. Zatem odcinki AA', BB' i CC' przecinają się w punkcie O.

Wykazaliśmy, że punkt O jest środkiem ciężkości mas $\operatorname{tg}\sphericalangle C$ i $\operatorname{tg}\sphericalangle A+\operatorname{tg}\sphericalangle B$ w punktach C i C'. Zatem

$$\frac{CO}{OC'}=\frac{\operatorname{tg}\sphericalangle A+\operatorname{tg}\sphericalangle B}{\operatorname{tg}\sphericalangle C}$$

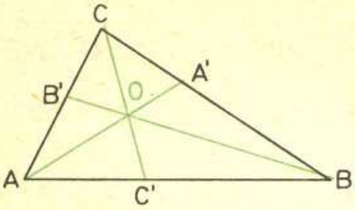
Analogicznie dowodzimy, że $\dfrac{AO}{OA'}=\dfrac{\operatorname{tg}\sphericalangle B+\operatorname{tg}\sphericalangle C}{\operatorname{tg}\sphericalangle A}$, $\dfrac{BO}{OB'}=\dfrac{\operatorname{tg}\sphericalangle A+\operatorname{tg}\sphericalangle C}{\operatorname{tg}\sphericalangle B}$

Uogólnieniem zadań 1 i 2 jest następujące zadanie:

Zadanie 3. Niech w trójkącie ABC na bokach AB, BC, CA będą dane odpowiednio punkty C', A', B' takie, że

$$\frac{AC'}{C'B}=k_1,\quad \frac{BA'}{A'C}=k_2 \quad\text{i}\quad \frac{CB}{B'A}=k_3 \quad\text{i}\quad k_1\cdot k_2\cdot k_3=1$$

Udowodnić, że odcinki AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie. W jakich stosunkach dzielą się te odcinki?



Rozwiązanie. Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy 1, k_1, $k_1 \cdot k_2$. Niech punkt O będzie środkiem ciężkości układu punktów A, B, C.

Ponieważ $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$, więc $k_3 = \dfrac{1}{k_1 k_2}$ zatem $\dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{1}{k_1 k_2}$.

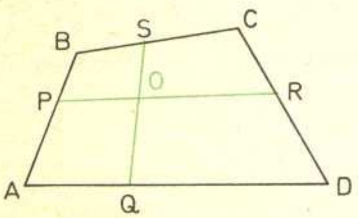
Ponieważ $\dfrac{AC'}{C'B} = k_1$ więc punkt C' jest środkiem ciężkości mas 1 i k_1 w punktach A i B. Zatem jeżeli w punkcie C' umieścimy masę $1+k_1$, to środek ciężkości punktów C i C' będzie się pokrywał z punktem O. Zatem punkt O należy do odcinka CC'. Analogicznie z równości $\dfrac{BA'}{A'C} = k_2 = \dfrac{k_2 k_1}{k_1}$ oraz $\dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{1}{k_1 k_2}$ wnioskujemy, że punkt O należy do odcinków AA' i BB'. Zatem proste AA' i BB' oraz CC' przecinają się w punkcie O, c.n.d.

Jak już udowodniliśmy, punkt O jest środkiem ciężkości mas $k_1 \cdot k_2$ i $1+k_1$ w punktach C i C', zatem $\dfrac{CO}{OC'} = \dfrac{1+k_1}{k_1 k_2}$

Podobnie obliczamy $\dfrac{BO}{OB'} = \dfrac{1+k_1 k_2}{k_1}$, $\dfrac{AO}{OA'} = k_1 k_2 + k_1 = k_1(k_2+1)$

Rozwiążemy teraz dwa zadania o czworokątach.

Zadanie 4 (XXVI Olimpiada matematyczna). W czworokącie płaskim wypukłym $ABCD$ wybrano na bokach przeciwległych AB i CD punkty P i R, zaś na bokach przeciwległych AD i BC punkty Q i S w ten sposób, że $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{DR}{RC} = a$, $\dfrac{AQ}{QD} = \dfrac{BS}{SC} = b$. Dowieść, że jeżeli O jest punktem przecięcia odcinków PR i QS, to $\dfrac{PO}{OR} = b$ oraz $\dfrac{QO}{OS} = a$.



Rozwiązanie. Umieśćmy w punktach A, B, C, D odpowiednio masy 1, a, ab, b. Ponieważ $\dfrac{BS}{SC} = b$ i $\dfrac{AQ}{QD} = b$ więc punkt S jest środkiem ciężkości mas a i ab w punktach B i C, a punkt Q jest środkiem mas 1 i b w punktach A i D.

Umieśćmy zatem w punktach S i Q odpowiednio masy $a+ab$ i $1+b$. Wtedy środek ciężkości punktów S i Q pokrywa się ze środkiem ciężkości układu punktów A, B, C, D. Zatem środek ciężkości układu punktów A, B, C, D leży na odcinku SQ.

Analogicznie, umieszczając w punktach P i R odpowiednio masy $1+a$ i $b+ab$ wnioskujemy, że środek ciężkości układu punktów A, B, C, D leży na odcinku PR. Ponieważ należy on jednocześnie do odcinka QS i do odcinka PR, więc jest nim punkt O. Punkt O jest zatem także środkiem ciężkości układu punktów P, R oraz układu punktów S, Q więc

$$\frac{PO}{OR} = \frac{b+ab}{1+a} = b \quad \text{i} \quad \frac{QO}{OS} = \frac{a+ab}{1+b} = a, \qquad \text{c.n.d.}$$

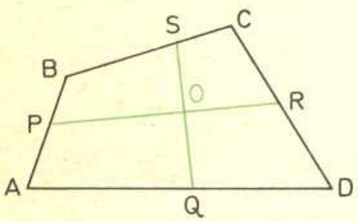
Rozwiążemy teraz zadanie ogólniejsze od zadania 4.

Zadanie 5. W czworokącie płaskim wypukłym $ABCD$ wybrano na bokach AB, BC, CD i DA odpowiednio punkty P, S, R, Q w ten sposób, że

$$\frac{AP}{PB} = a_1, \quad \frac{BS}{SC} = a_2, \quad \frac{CR}{RD} = a_3, \quad \frac{DQ}{QA} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

Niech punkt O będzie punktem przecięcia odcinków PR i SQ.

W jakich stosunkach punkt O dzieli te odcinki?



Rozwiązanie. Umieśćmy w punktach A, B, C, D odpowiednio masy 1, a_1, $a_1 \cdot a_2$, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$.

Ponieważ $\dfrac{AP}{PB} = a_1$ i $\dfrac{CR}{RD} = a_3 = \dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{a_1 a_2}$ więc punkt P jest środkiem ciężkości mas 1 i a_1 w punktach A i B, a punkt R jest środkiem mas $a_1 a_2$ i $a_1 a_2 a_3$ w punktach C i D. Umieśćmy zatem w punktach P i R odpowiednio masy $1+a_1$ i $a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3$.

Wtedy środek ciężkości punktów P i R pokrywa się ze środkiem ciężkości całego układu punktów A, B, C, D. Zatem środek ciężkości całego układu punktów A, B, C, D leży na odcinku PR.

Analogicznie umieszczając w punktach S i Q odpowiednio masy $a_1 + a_1 a_2$ i $1 + a_1 a_2 a_3$ dowodzimy, że środek ciężkości całego układu punktów A, B, C, D leży na odcinku SQ. Ponieważ leży on też na odcinku PR, więc środkiem ciężkości układu punktów A, B, C, D jest punkt O. Punkt O jest jednocześnie środkiem ciężkości mas $1+a_1$ i $a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3$ w punktach P i R oraz środkiem ciężkości mas $a_1 + a_1 a_2$ i $1 + a_1 a_2 a_3$ w punktach S i Q. Zatem

$$\frac{PO}{OR} = a_1 a_2 \cdot \frac{1+a_3}{1+a_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{SO}{OQ} = \frac{1+a_1 a_2 a_3}{a_1 + a_1 a_2}$$

Pokazaliśmy na przykładach, jak można stosować zasady fizyki do rozwiązywania zadań z geometrii. Zadania te można by oczywiście rozwiązać metodą „czysto matematyczną", która jednak mogłaby być bardziej skomplikowana (np. zadanie 4 rozwiązałem korzystając z twierdzenia Menelausa, co było bardzo pracochłonne i wymagało wielu wyliczeń).